東京工業大学

2015年 理系 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=5,\quad a_{n+1}=\frac{4a_n-9}{a_n-2}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める．また数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n=\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

と定める．

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) すべての n に対して，不等式 $b_n \leqq 3+\dfrac{4}{n+1}$ が成り立つことを示せ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ．

(1) $a_1=\dfrac{5}{1}$, $a_2=\dfrac{11}{3}$, $a_3=\dfrac{17}{5}$, $a_4=\dfrac{23}{7}$

より．$a_n=\dfrac{6n-1}{2n-1}$ と推測できる

数学的帰納法で示す

(i) $n=1$ のとき $a_1=\dfrac{5}{1}$ となり成り立つ

(ii) $n=k$ のとき成り立つと仮定すると．

$$a_k=\frac{6k-1}{2k-1}$$

このとき，

$$a_{k+1}=\frac{4a_k-9}{a_k-2}$$

$$=\frac{4\cdot\frac{6k-1}{2k-1}-9}{\frac{6k-1}{2k-1}-2}$$

$$=\frac{4(6k-1)-9(2k-1)}{6k-1-2(2k-1)}$$

$$=\frac{6k+5}{2k+1}\left(=\frac{6(k+1)-1}{2(k+1)-1}\right)$$

∴ $n=k+1$ のときも成り立つ

(i),(ii) より，$n=1,2,3,\cdots$ に対して

$$a_n=\frac{6n-1}{2n-1}\ ▨$$

(2) $$b_n=\frac{\sum k\cdot a_k}{\sum k}$$ （Σ の範囲は $k=1$ から $k=n$ まで）

$$=\frac{\sum k\left(3+\frac{2}{2k-1}\right)}{\sum k}$$

$$=3+2\cdot\frac{\sum \frac{k}{2k-1}}{\sum k}$$

$k=1,2,\cdots,n$ に対して $\dfrac{k}{2k-1}\leqq 1$ なので

$$\leqq 3+2\cdot\frac{\sum 1}{\sum k}$$

$$=3+2\cdot\frac{n}{\frac{1}{2}n(n+1)}$$

$$=3+\frac{4}{n+1}\ ▨$$

(3) (2) の証明の式より $b_n\geqq 3$ は分かるので

$$3\leqq b_n\leqq 3+\frac{4}{n+1}$$

$n\to\infty$ のとき，（$\dfrac{4}{n+1}\to 0$ より）はさみうちの原理より $\underline{\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n=3}$ //