0000116093889999

首都大学東京

2010年第1問

$\boxed{1}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ に対して，以下の問いに答えなさい．

(1) 行列 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，$P^{-1}AP$ を求めなさい．

(2) a を実数とし，$T = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ としたとき，任意の自然数 n に対して，行列 T^n を求め，その理由も述べなさい．

(3) 任意の自然数 n に対して，行列 A^n を求めなさい．

数理 石井K

(1) $\det(P) = 1 - 0 = 1 \quad \therefore P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}$ //

(2) $T^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$, $T^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}$, $T^4 = \begin{pmatrix} a^4 & 4a^3 \\ 0 & a^4 \end{pmatrix}$ より

$T^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$ と類推して．数学的帰納法で示す

(i) $n=1$ のとき．$T^1 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ となり成り立つ

(ii) $n=k$ のとき 成り立つと仮定すると，$T^k = \begin{pmatrix} a^k & ka^{k-1} \\ 0 & a^k \end{pmatrix}$

$T^{k+1} = T \cdot T^k = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^k & ka^{k-1} \\ 0 & a^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^k \\ 0 & a^{k+1} \end{pmatrix}$

$\therefore$ $n=k+1$ のときも成り立つ

(i)，(ii) より．任意の自然数 n に対して $\underline{T^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}}$ //

(3) (2) と (1) を使って．$\underbrace{(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)}_{n\text{コの積}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n$

$\therefore P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} 3^n & n\cdot 3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \qquad \therefore A^n = P\begin{pmatrix} 3^n & n\cdot 3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}P^{-1}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^n & n\cdot 3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \underline{\begin{pmatrix} (n+3)\cdot 3^{n-1} & n\cdot 3^{n-1} \\ -n\cdot 3^{n-1} & -(n-3)\cdot 3^{n-1} \end{pmatrix}}$ //