

2010年第3問

3 座標平面上で、行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で表される移動を f とする。0でないすべての実数 t に対して、点 $P\left(t + \frac{1}{t}, t - \frac{1}{t}\right)$ が f により曲線 $x^2 - y^2 = 4$ 上に移るとき、次の問に答えよ。

(1) a, b, c, d は、

$$(a+b)^2 = (c+d)^2, \quad (a-b)^2 = (c-d)^2, \quad (a^2 - c^2) + (d^2 - b^2) = 2$$

を満たすことを示せ。

(2) a, b, c, d は、

$$a^2 - c^2 = d^2 - b^2 = 1, \quad ab = cd$$

を満たすことを示せ。

(3) $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とするとき、

$$X^2 - Y^2 = x^2 - y^2$$

となることを示せ。

(4) 点 Q が直線 $y = x$ 上にあるとき、 $f(Q)$ は直線 $y = x$ または直線 $y = -x$ 上にあることを示せ。