2016年 歯学部 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 平面上の放物線 $y=f(x)$ が2点 $(0,\ 1)$, $(1,\ 0)$ を通る.

(1) $f(x)=ax^2+bx+c$ とするとき，係数 a, b, c が満たす条件を求めよ.

(2) 放物線 $y=f(x)$ が区間 $0<x<1$ で x 軸と交差する. このときの x 座標を $f(x)$ の式とともに求めよ.

(3) $y=f(x)$ と x 軸，y 軸とで囲まれる図形が2つの部分からなり，それぞれの面積が互いに等しいという. $f(x)$ を求めよ.

(1) $(0,1)$ を通ることより，$1=c$

$(1,0)$ を通ることより，$a+b+c=0$

$y=f(x)$ が放物線より，$a\neq0$

以上より，$\underline{a\neq0 \text{ かつ } a+b=-1 \text{ かつ } c=1}$ //

(2) (1)より，$a\neq0$ であり，

$$f(x)=ax^2-(a+1)x+1$$

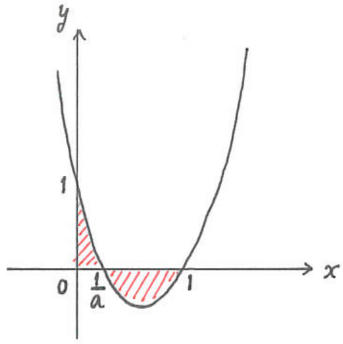
$$\begin{array}{ccc} a & \times & -1 \\ 1 & & -1 \end{array}$$

$$=(ax-1)(x-1)$$

∴ $0<x<1$ となるのは，$x=\frac{1}{a}$ で，$a>1$

以上より，条件をみたすのは，

$a>1$ のとき，$\underline{x=\frac{1}{a},\ f(x)=ax^2-(a+1)x+1}$ //



(3) それぞれの面積が等しい $\Longleftrightarrow \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=0$

であるから，

$$\int_0^1 ax^2-(a+1)x+1\,dx=\left[\frac{a}{3}x^3-\frac{1}{2}(a+1)x^2+x\right]_0^1$$

$$=\frac{a}{3}-\frac{1}{2}(a+1)+1$$

$$=-\frac{1}{6}a+\frac{1}{2}$$

∴ $a=3$ でこれは $a>1$ をみたす. このとき，$\underline{f(x)=3x^2-4x+1}$ //