2016年 歯学部 第3問

$\boxed{3}$ 平面上に異なる4点A，B，O，Pがあり，$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OB}$とする．以下の問に答えよ．

注

(1) $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$をみたす点Pの軌跡を求めよ．

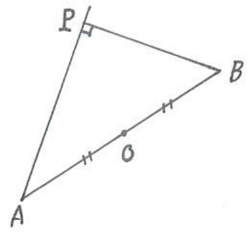
(2) (1)のPのうち，さらに，$\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left|\overrightarrow{AO}\right|^2 \leqq \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AO} \leqq \dfrac{3}{2}\left|\overrightarrow{AO}\right|^2$をみたすPの軌跡の長さを求めよ．

(1) 右の図より．

点Pの軌跡は

線分ABを直径とする円の周 // （ただしA，Bは除く）

逆にPがその円周上にあれば $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$ となる．



(2) $\angle OAP=\theta$ とおくと．$\left(0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$(与式)\iff \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)|\overrightarrow{AO}|^2 \leqq |\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AO}|\cdot\cos\theta \leqq \frac{3}{2}|\overrightarrow{AO}|^2$$

$$\iff \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)|\overrightarrow{AO}|^2 \leqq |\overrightarrow{AB}|\cos\theta\cdot|\overrightarrow{AO}|\cos\theta \leqq \frac{3}{2}|\overrightarrow{AO}|^2$$

$$\iff \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)|\overrightarrow{AO}|^2 \leqq 2|\overrightarrow{AO}|\cos\theta\cdot|\overrightarrow{AO}|\cos\theta \leqq \frac{3}{2}|\overrightarrow{AO}|^2$$

$$\iff 1-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqq 2\cos^2\theta \leqq \frac{3}{2}$$

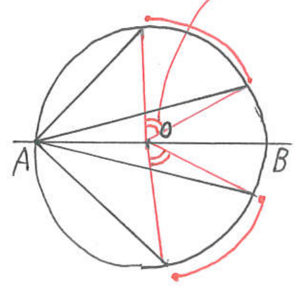
$$\iff 1-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqq 1+\cos 2\theta \leqq \frac{3}{2}$$

$$\iff -\frac{\sqrt{2}}{2} \leqq \cos 2\theta \leqq \frac{1}{2}$$

$$\iff \frac{\pi}{3} \leqq 2\theta \leqq \frac{3\pi}{4}$$

$$\cancel{\left(\iff \frac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \frac{3}{8}\pi\right)}$$

$\dfrac{3}{4}\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{5}{12}\pi$



∴ Pの軌跡の長さは、$|\overrightarrow{AO}|\cdot\dfrac{5}{12}\pi\cdot 2=\underline{\dfrac{5}{6}\pi|\overrightarrow{AO}|}$ //