0002188901187999

北海道大学

2016年 文系 第2問

$\boxed{2}$ $f(x)=|x(x-2)|+|(x-1)(x-4)|+3x-10$ $(-2 \leqq x \leqq 4)$ とおく．

(1) 関数 $y=f(x)$ のグラフをかけ．グラフと x 軸との2つの交点の x 座標 α, β $(\alpha<\beta)$ の値も求めよ．

(2) (1)の α, β に対して，定積分 $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ の値を求めよ．

(1) (i) $-2 \leqq x < 0$ のとき

$x(x-2)>0$, $(x-1)(x-4)>0$ なので

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x(x-2)+(x-1)(x-4)+3x-10 \\
&= 2x^2-4x-6 \\
&= 2(x+1)(x-3)
\end{aligned}
$$

$\therefore$ $-2 \leqq x < 0$ より．x 軸との交点の x 座標は -1

(ii) $0 \leqq x < 1$ のとき

$x(x-2) \leqq 0$, $(x-1)(x-4)>0$ なので

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -x(x-2)+(x-1)(x-4)+3x-10 \\
&= -6
\end{aligned}
$$

x 軸との交点はなし

(iii) $1 \leqq x < 2$ のとき

$x(x-2)<0$, $(x-1)(x-4) \leqq 0$ なので

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -x(x-2)-(x-1)(x-4)+3x-10 \\
&= -2x^2+10x-14 \\
&= -2(x^2-5x+7) \\
&= -2\Big\{\underbrace{\left(x-\tfrac{5}{2}\right)^2+\tfrac{3}{4}}_{>0}\Big\}
\end{aligned}
$$

$\therefore$ x 軸との交点はなし．

(iv) $2 \leqq x \leqq 4$ のとき．

$x(x-2) \geqq 0$, $(x-1)(x-4) \leqq 0$ なので

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x(x-2)-(x-1)(x-4)+3x-10 \\
&= 6x-14
\end{aligned}
$$

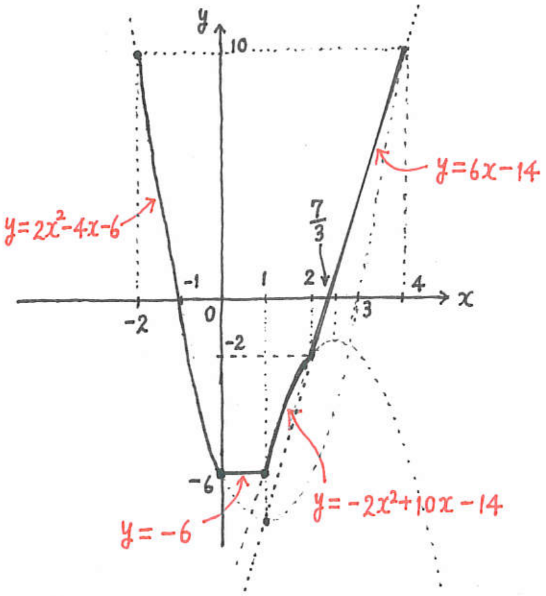
$2 \leqq x \leqq 4$ より．x 軸との交点の x 座標は．$\frac{7}{3}$

(i)～(iv) より，

$$
f(x)=\begin{cases}
2x^2-4x-6 & (-2 \leqq x < 0) \\
-6 & (0 \leqq x < 1) \\
-2x^2+10x-14 & (1 \leqq x < 2) \\
6x-14 & (2 \leqq x \leqq 4)
\end{cases}
$$

$\therefore$ $y=f(x)$ のグラフは下のようになる

また，$\underline{\alpha=-1,\ \beta=\frac{7}{3}}$ //



(2)

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{\frac{7}{3}} f(x)\,dx &= \int_{-1}^{0} 2x^2-4x-6\,dx \\
&\quad + \int_0^1 -6\,dx + \int_1^2 -2x^2+10x-14\,dx \\
&\quad + \int_2^{\frac{7}{3}} 6x-14\,dx \\
&= \left[\frac{2}{3}x^3-2x^2-6x\right]_{-1}^{0} -6 + \left[-\frac{2}{3}x^3+5x^2-14x\right]_1^2 \\
&\quad + \left[3x^2-14x\right]_2^{\frac{7}{3}} \\
&= \underline{-\frac{40}{3}}
\end{aligned}
$$

//