岩手大学

2016年 農学部 第5問

数理 石井K

$\boxed{5}$ 放物線 $y=x^2$ と円 $x^2+(y-3)^2=\frac{r^2}{4}$ について，次の問いに答えよ．ただし，r は正の定数である．

(1) $r=6$ のとき，放物線と円の共有点の座標をすべて求めよ．

(2) r がすべての正の実数値をとって変化するとき，放物線と円の共有点の個数はどのように変わるか，調べよ．

(1) $y=x^2$ を円の方程式に代入し，x を消去すると，

$$y+(y-3)^2=\frac{r^2}{4}$$

$$\therefore\ y^2-5y+9-\frac{r^2}{4}=0 \quad \cdots (*)$$

$r=6$ のとき，$y^2-5y=0$

$\therefore\ y(y-5)=0$ より，$y=0, 5$

$y=x^2$ に代入して x も求めると，共有点は，$(0,0), (-\sqrt{5},5), (\sqrt{5},5)$ //

(2) $(*)$ の判別式を D とすると，

$$D=25-4\left(9-\frac{r^2}{4}\right)$$
$$=r^2-11$$

(i) $D<0$ すなわち $0<r<\sqrt{11}$ のとき

$(*)$ は実数解をもたず，共有点は0個

(ii) $D=0$ すなわち $r=\sqrt{11}$ のとき

$(*)$ は $\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=0 \quad \therefore\ y=\frac{5}{2}\ (>0)$

$\therefore\ y=x^2$ より，x も求めると，共有点は 2個

(iii) $D>0$ すなわち $r>\sqrt{11}$ のとき

$(*)$ において，解と係数の関係より，解を $y=\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと，

$$\alpha+\beta=5,\quad \alpha\beta=9-\frac{r^2}{4}=\frac{(6+r)(6-r)}{4}$$

$r>0$ であるから，$6+r>0 \quad \therefore\ \sqrt{11}<r<6$ のとき，$\alpha+\beta>0$，$\alpha\beta>0 \quad \therefore$ 異なる2つの正の解をもつ

$\therefore\ \sqrt{11}<r<6$ のとき，共有点は4個，$r=6$ のときは(1)より3個．

$r>6$ のときは，$\alpha+\beta>0$，$\alpha\beta<0$ より 正と負の解を1つずつもつ　$y=x^2$ より $y\geqq 0$ であるから

共有点は2個．

(i)～(iii)より，$0<r<\sqrt{11}$ のとき0個，$r=\sqrt{11}$，$r>6$ のとき2個，$r=6$ のとき3個，$\sqrt{11}<r<6$ のとき4個． //