2016年 社会科学学部 第3問

$\boxed{3}$ x，y，zの1次方程式

$x+y+z=2k-1$　…　①

について，次の問に答えよ．ただし，定数kは$k \geqq 6$を満たす整数である．

(1) 方程式①の整数解$(x,\ y,\ z)$のうち，$x>0$，$y>0$，$z>0$をすべて満たすものは全部で何個あるか，kを用いて表せ．

(2) (1)のうち，$x \leqq k$を満たすものは全部で何個あるか，kを用いて表せ．

(3) (1)のうち，$x \leqq k$，$y \leqq k+1$，$z \leqq k+2$をすべて満たすものは全部で何個あるか，kを用いて表せ．

(1) 求める整数解の個数は．

$x+y+z=2k-4$，$x \geqq 0, y \geqq 0, z \geqq 0$

の整数解の個数に等しいから．

$${}_{2k-4+2}C_2 = {}_{2k-2}C_2$$
$$= \frac{1}{2}(2k-2)(2k-3)$$
$$= \underline{2k^2-5k+3\ 個.}$$

(2) (1)の整数解で$x>k$となるものの個数は．

$x+y+z=k-4$，$x \geqq 0, y \geqq 0, z \geqq 0$

の整数解の個数に等しいから

$${}_{k-4+2}C_2 = \frac{1}{2}(k-2)(k-3)$$

$\therefore$ $x \leqq k$となるものは．$2k^2-5k+3-\frac{1}{2}(k-2)(k-3) = \underline{\frac{3}{2}k^2-\frac{5}{2}k\ 個.}$

(3) $x>k$，$y>k+1$，$z>k+2$はどの2つも同時には起こらないから．

(2)と同様にして．$y>k+1$となるものは．${}_{k-5+2}C_2 = \frac{1}{2}(k-3)(k-4)$

$z>k+2$　〃　${}_{k-6+2}C_2 = \frac{1}{2}(k-4)(k-5)$

$\therefore$ (2)より．$\frac{3}{2}k^2-\frac{5}{2}k-\frac{1}{2}(k-3)(k-4)-\frac{1}{2}(k-4)(k-5) = \underline{\frac{1}{2}k^2+\frac{11}{2}k-16\ 個.}$