

2017年工学部（中期）第3問

3 この問題は最短ネットワーク問題と呼ばれるものである。次の問いに答えなさい。

- (1) 図2のように長方形 $ABCD$ ($AB = 2a$, $AD = b$) において、点 A から出発し、辺 CD 上の1点 P ($DP = x$) を経由して、点 B に至るとき、経路長 $AP + PB$ が最小となるのは、点 P が CD の中点 ($x = a$) に位置するときであることを微分を利用して証明しなさい。
- (2) 図3のように長方形の頂点に位置する4つの町 A, B, C, D ($AB = 2a$, $AD = 2b$ ($b \geq a$)) を結ぶ最短の道路網を作りたい。この問題を考えるとき、(1)の結果をふまえて対称性（上下、左右が対称である）を考慮すると、図3のように接続点 E, F をつくり道路を作ることが考えられる（点 G は AB の中点、点 H は CD の中点、 G, E, F, H は同一直線上にある）。このとき AB と AE のなす角を θ として全道路長 $f(\theta) = AE + BE + EF + FD + FC$ を求めなさい。さらに $f(\theta)$ を最小とする θ を求めなさい。