

2010年理系第4問

4  $a, b$ は  $a < b$ をみたす実数とする.  $f(x), g(x)$ は閉区間  $[a, b]$ で定義された連続関数で,  $g(x) \leq f(x)$ をみたすとする. 座標平面上, 不等式  $a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)$ をみたす点  $(x, y)$ 全体からなる図形を  $A$ とする.  $A$ の面積  $S$ が正のとき,  $A$ の重心の  $y$ 座標は,

$$\frac{1}{S} \int_a^b \frac{\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2}{2} dx$$

で与えられる. この事実を用いて, 次の問いに答えよ.

- (1)  $r$ は  $0 < r < 1$ をみたす実数とする. 不等式  $r^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0$ をみたす点  $(x, y)$ 全体からなる図形を  $B$ とおく.  $B$ の重心の  $y$ 座標  $Y(r)$ を  $r$ を用いて表せ.
- (2)  $t$ は正の実数とする. 不等式  $-1 \leq x \leq 1, \sqrt{1-x^2} - t \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$ をみたす点  $(x, y)$ 全体からなる図形を  $C$ とおく.  $C$ の重心の  $y$ 座標  $Z(t)$ を  $t$ を用いて表せ.
- (3) (1)で得られた  $Y(r)$ と(2)で得られた  $Z(t)$ について,  $\lim_{r \rightarrow 1-0} Y(r)$ と  $\lim_{t \rightarrow +0} Z(t)$ の大小を比較せよ.