大阪市立大学

2015年 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ $m>0$とする．座標平面上の点Pに対して，Pを通る傾きmの直線とy軸の交点をRとし，点Qを$\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=m\overrightarrow{\mathrm{RP}}$となるように定める．次の問いに答えよ．

(1) Pの座標を$(a,\ b)$とするとき，Qの座標を$m,\ a,\ b$を用いて表せ．

(2) 点Pが放物線$y=x^2-x$上を動くとき，対応する点Qの軌跡をCとする．Cの方程式を$y=f(x)$とするとき，$f(x)$を求めよ．

(3) (2)の$f(x)$に対し，$I(m)=\int_0^m f(x)\,dx$とする．mを$m>0$の範囲で変化させるとき，$I(m)$を最小にするmの値を求めよ．

(1) Pを通る傾きmの直線をlとすると．$l: y=m(x-a)+b$

$\therefore R(0, -am+b)$

$\overrightarrow{RQ}=m\overrightarrow{RP}$ より．$\overrightarrow{OQ}=m\overrightarrow{RP}+\overrightarrow{OR}$ $\quad\therefore \underline{Q(am, am^2-am+b)}$ //

(2) $b=a^2-a$ を(1)で求めたQの座標に代入して，

$Q(am, a(m^2-m+a-1))=(x, f(x))$

$\therefore x=am$ より $a=\frac{x}{m}$ $\quad\therefore \underline{f(x)=\frac{x^2}{m^2}+\left(m-\frac{1}{m}-1\right)x}$ //

(3) $I(m)=\int_0^m \frac{x^2}{m^2}+\left(m-\frac{1}{m}-1\right)x\,dx$

$=\left[\frac{x^3}{3m^2}+\frac{1}{2}\left(m-\frac{1}{m}-1\right)x^2\right]_0^m$

$=\frac{1}{2}m^3-\frac{1}{2}m^2-\frac{1}{6}m$

$\therefore I'(m)=\frac{1}{6}(9m^2-6m-1)$

$m>0$ なので，$I'(m)=0$ となるのは．$m=\frac{1+\sqrt{2}}{3}$

m	(0)	$\cdots$	$\frac{1+\sqrt{2}}{3}$	$\cdots$
$I'(m)$		$-$	0	$+$
$I(m)$	(0)	$\searrow$		$\nearrow$

増減表より．$I(m)$を最小にするmは，

$\underline{m=\frac{1+\sqrt{2}}{3}}$ //