

# 大阪府立大学

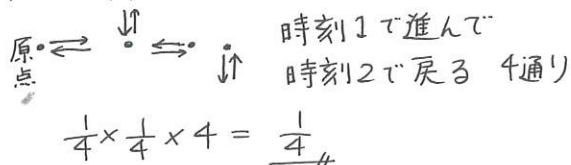
2017年文系第1問

増田

1 駒が単位時間ごとに座標平面上を移動するものとする。  $n$  は 0 以上の整数とし、時刻  $n$  に点  $(x, y)$  にある駒は、時刻  $n+1$  には  $\frac{1}{4}$  ずつの確率で、4点  $(x+1, y)$ ,  $(x-1, y)$ ,  $(x, y+1)$ ,  $(x, y-1)$  のいずれかに移動するものとする。時刻 0 に点  $(0, 0)$  にある駒について、次の問いに答えよ。

- (1) 時刻 2 に、駒が点  $(0, 0)$ , 点  $(1, 0)$ , 点  $(1, 1)$ , 点  $(2, 0)$  にある確率を、それぞれ求めよ。  
 (2) 時刻 4 に、駒が点  $(0, 0)$  にある確率を求めよ。  
 (3) 時刻  $n$  に駒が点  $(x, y)$  にあるとき、 $n$  と  $x+y$  の差は 2 の倍数であることを示せ。

(1) ① 点  $(0, 0)$  にある確率

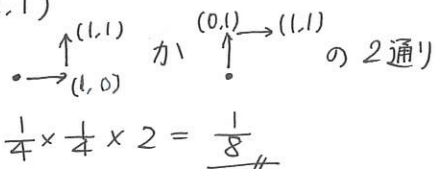


② 点  $(1, 0)$

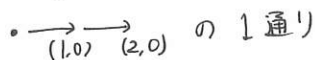
条件の移動法では時刻 2 に点  $(1, 0)$  には到着しない。

よって確率は  $\frac{0}{4}$

③ 点  $(1, 1)$



④ 点  $(2, 0)$



$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

(2) 時刻 4 に駒が点  $(0, 0)$  にあるのは

i) 時刻 2 に  $(\pm 2, 0)$ ,  $(0, \pm 2)$  にある

ii) 時刻 2 に  $(0, 0)$  にある

iii) 時刻 2 に  $(1, 1)$ ,  $(1, -1)$ ,  $(-1, 1)$ ,  $(-1, -1)$  にある

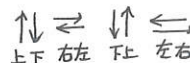
の 3 パターン

i) 時刻 2 に  $(\pm 2, 0)$ ,  $(0, \pm 2)$  にある

例えば  $\rightarrow \rightarrow \leftarrow \leftarrow$  など 4通り  
右 右 左 左

ii) 時刻 2 に  $(0, 0)$  にある

時刻 1, 2 で 4通り、時刻 3, 4 も 4通り



$$4 \times 4 = 16 \text{ 通り}$$

iii) 時刻 2 に  $(1, 1)$ ,  $(1, -1)$ ,  $(-1, 1)$ ,  $(-1, -1)$  にある

例えば 時刻 1, 2 で 2通り、時刻 3, 4 も 2通り



$$2 \times 2 \times 4 = 16 \text{ 通り}$$

求める確率は、

$$\frac{4 + 16 + 16}{4 \times 4 \times 4 \times 4} = \frac{9}{64}$$

(3) 数学的帰納法を使う

(証) i)  $n=0$  のとき、駒は点  $(0, 0)$  にあり、

$$0 - (0+0) = 0 \text{ となり } 2 \text{ の倍数}$$

$n=1$  のとき点  $(x, y) = (\pm 1, 0), (0, \pm 1)$  で、

$$n - (x+y) = \begin{cases} 1-1 = 0 & \text{どちら} \\ 1-(-1) = 2 & \text{2の倍数} \end{cases}$$

ii)  $n=k$  ( $\geq 1$ ) のとき点  $(x_k, y_k)$  にあり、

$$k - (x_k + y_k) = 2m \quad (m: \text{整数})$$

とする。

$n=k+1$  のとき、

$$k+1 - (x_{k+1} + y_{k+1}) = 2m + \begin{cases} 0 & \text{どちら} \\ 2 & \text{2の倍数} \end{cases}$$

$(x_{k\pm 1}, y_{k\pm 1})$  か  
 $(x_k, y_{k\pm 1})$

以上よりすべての  $n$  に対して題意が成り立つ。