

2018年理系第4問

4 n を 2 以上の自然数とし、原点 O を中心とする単位円周上に $2n + 1$ 個の相異なる点

$$P_k \left(\cos \frac{2\pi k}{2n+1}, \sin \frac{2\pi k}{2n+1} \right) \quad (k = 0, 1, \dots, 2n)$$

を取る。また整数 j に対して、 j を $2n + 1$ で割った余りが $k = 0, 1, \dots, 2n$ のとき、 $P_j = P_k$ と約束する。この記法の下で、

線分 $P_k P_{k+n}$ と線分 $P_{k+1} P_{k+1-n}$ との交点を Q_k ($k = 0, 1, \dots, 2n$)

とおく。点 $P_0, Q_0, P_1, Q_1, \dots, P_{2n}, Q_{2n}, P_0$ を順に結んでできる折れ線が囲む図形を K_n とし、その面積を A_n とする。このとき次の問いに答えよ。

- (1) $\angle OP_0 Q_0$ および $\angle P_0 O Q_0$ の値を n を用いて表せ。
- (2) (1) で求めた $\angle OP_0 Q_0$ の値を θ_n とおく。三角形 $\triangle OP_0 Q_0$ の面積を θ_n を用いて表せ。
- (3) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ を求めよ。