学習院大学

2015年 理学部 第3問

$\boxed{3}$ 関数

$$f(x)=\frac{\log x}{x}\quad (x>0)$$

を考える．

(1) x が正の実数全体を動くとき，$f(x)$ の最大値と，最大値を与える x の値を求めよ．

(2) 曲線 $y=f(x)$ の変曲点の座標を求めよ．

(3) 不等式

$$\int_1^n f(x)\,dx>2$$

を満たす最小の自然数 n を求めよ．ただし，自然対数の底 e は $2.7<e<2.8$ を満たすことを用いてよい．

(1) $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\log x}{x^2}=\dfrac{1-\log x}{x^2}$

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

$\therefore$ $f'(x)=0$ となるのは，$x=e$

右の増減表より，$\underline{\text{最大値 } \frac{1}{e}\ (x=e \text{ のとき})}$ //

(2) $f''(x)=\dfrac{-\frac{1}{x}\cdot x^2-(1-\log x)\cdot 2x}{x^4}=\dfrac{2\log x-3}{x^3}$

$\therefore$ $f''(x)=0$ となるのは，$x=e\sqrt{e}$

この前後で $f''(x)$ の符号は変わらないので，変曲点は $\underline{\left(e\sqrt{e},\ \frac{3}{2e\sqrt{e}}\right)}$ //

(3) $S=\int_1^n f(x)\,dx$ とおくと

$S=\int_1^n (\log x)'\log x\,dx$

$=\left[(\log x)^2\right]_1^n-S$

$\therefore$ $S=\frac{1}{2}(\log n)^2$

$\therefore$ $\frac{1}{2}(\log n)^2>2 \iff (\log n)^2>4$

$\iff \log n>2$

$\iff n>e^2$

$2.7<e<2.8$ より

$7.29<e^2<7.84$

$\therefore$ $\underline{n=8}$ //