

2011年医学部第4問

4 次の問いに答えよ。

- (1) 3つの数  $2^{10} - 1$ ,  $3^{10} - 1$ ,  $4^{10} - 1$  の積を  $y = (2^{10} - 1)(3^{10} - 1)(4^{10} - 1)$  として、全体集合  $U$  と部分集合  $A$ ,  $B$  を次のように定める。

$$U = \{x \mid x \text{ は } y \text{ の正の約数}\}$$

$$A = \{x \mid x \in U \text{ かつ } x \text{ は } 44 \text{ の倍数}\}$$

$$B = \{x \mid x \in U \text{ かつ } x \text{ は } 45 \text{ の倍数}\}$$

このとき、部分集合  $A \cap \overline{B}$  に属する要素は、全部で何個あるか。

以下、数列  $a_n = 4^n - 1$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を考える。

- (2) 次の命題  $P$  を証明せよ。

命題  $P$   $n$  が 3 で割り切れることは、 $a_n$  が 9 で割り切れるための十分条件である。

- (3) 命題  $P$  において、十分条件を必要十分条件に書きかえて、命題  $Q$  をつくる。命題  $Q$  の真偽を答えよ。
- (4) 9 と 11 のうち、どちらか一方の数で割り切れるけれども、他方の数では割り切れないような  $a_n$  だけを取り出し、残りはすべて取り去る。こうして得られる  $a_n$  の部分列を小さい順に並べると、23 番目の項は元の数列では第  $k$  項になるという。番号  $k$  を求めよ。