



2014年 理学部・工学部 第5問

5  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  とし,  $t$  は実数とする.  $A$  は,  $A^3 = E$  を満たす 2 次の正方行列とする.

- (1)  $(A - tE)(A^2 + tA + t^2E)$  を  $t$  と  $E$  を用いて表せ.
- (2)  $t \neq 1$  のとき  $A - tE$  は逆行列をもつことを示せ.
- (3) 次の 3 つの命題を証明せよ.
  - (i)  $A = E$  ならば,  $A^2 + A + E \neq O$  である.
  - (ii)  $A^2 + A + E \neq O$  ならば,  $A - E$  は逆行列をもたない.
  - (iii)  $A - E$  が逆行列をもたないならば,  $A = E$  である.