0001862277318999

茨城大学

2014年 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 次の各問に答えよ．ここで，必要ならば $0.301 < \log_{10} 2 < 0.302$ であることを用いてもよい．

(1) $k \leqq \log_{\sqrt{2}} 25 < k+1$ を満たす自然数 k を求めよ．

(2) 8^n の桁数が 26 以上になる最小の自然数 n を求めよ．例えば，2014 の桁数は 4 である．

(1) 底の変換公式より

$c>0,\ c \neq 1$ のとき $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

$$\log_{\sqrt{2}} 25 = \frac{\log_{10} 25}{\log_{10} \sqrt{2}} = \frac{2\log_{10} 5}{\frac{1}{2}\log_{10} 2} = \frac{2\log_{10}\frac{10}{2}}{\frac{1}{2}\log_{10} 2} = \frac{2(1-\log_{10} 2)}{\frac{1}{2}\log_{10} 2}$$

したがって $\log_{\sqrt{2}} 25 = \dfrac{4-4\log_{10} 2}{\log_{10} 2} = \dfrac{4}{\log_{10} 2} - 4$

$$\therefore \frac{4}{0.302} - 4 < \log_{\sqrt{2}} 25 < \frac{4}{0.301} - 4$$

$$\therefore 9.2 < \log_{\sqrt{2}} 25 < 9.3 \qquad \therefore \underline{k=9}$$

(2) ~~10本~~

26桁の最小の整数は 10^{25}

~~〃 最大の 〃 $10^{26}-1$ なので~~

8^n が 26桁以上 $\Longleftrightarrow$ $8^n \geqq 10^{25}$

両辺，底10の対数をとると $n \log_{10} 8 \geqq 25$

$$\therefore 3n \log_{10} 2 \geqq 25$$

$$\therefore n \geqq \frac{25}{3\log_{10} 2}$$

ここで $\underset{\substack{\rotatebox{90}{$\fallingdotseq$} \\ 27.6}}{\dfrac{25}{3 \cdot 0.302}} < \dfrac{25}{3\log_{10} 2} < \underset{\substack{\rotatebox{90}{$\fallingdotseq$} \\ 27.7}}{\dfrac{25}{3 \cdot 0.301}}$

よって 最小の自然数 n は $\underline{n=28}$