0001907452908999

聖マリアンナ医科大学

2014年 医学部 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 以下の設問の $\boxed{}$ に答えなさい．

(1) aを1より大きな実数，eを自然対数の底とし，$f(x) = a^x \log_e a$とする．このとき，曲線$y = f(x)$，直線$x = 10$，x軸およびy軸で囲まれた部分の面積Sをaを用いた式で表すと，$S = \boxed{1}$ となる．

$a^{10}-1$

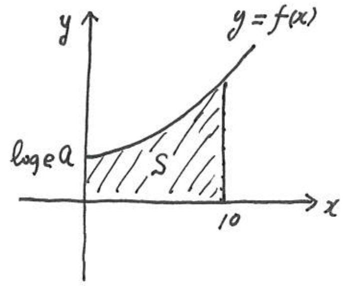
(2) $\sin x - \cos x = \dfrac{1}{2}$（ただし，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$）のとき，$\sin^4 x - \cos^4 x$の値を求めると $\boxed{2}$ となる．

$\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

(3) 数列$\{a_n\}$を初項2，公差7の等差数列，数列$\{b_n\}$を初項1，公比2の等比数列とし，数列$\{c_n\}$の第n項を$c_n = a_n b_n$（$n = 1, 2, 3, \cdots$）と定義する．数列$\{c_n\}$の初項から第n項までの和S_nをnを用いた式で表すと，$S_n = \boxed{3}$ となる．また，$S_n = 133132$となるのは$n = \boxed{4}$ のときである．

$(7n-12)\cdot 2^n+12$ 　　11

(1) $f(x)$は単調増加でグラフは右のようになる．



$$\therefore S = \int_0^{10} a^x \log_e a \, dx$$

$$= \left[a^x \right]_0^{10}$$

$$= \underline{a^{10}-1}$$

(2) $\sin x - \cos x = \frac{1}{2}$ の両辺を2乗して，$1 - 2\sin x \cos x = \frac{1}{4}$ $\therefore \sin x \cos x = \frac{3}{8}$

$\therefore (\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x \cos x = \frac{7}{4}$ 　$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$より $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{7}}{2}$

$\therefore \sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} = \underline{\frac{\sqrt{7}}{4}}$

(3) $a_n = 2 + 7(n-1) = 7n-5$，$b_n = 2^{n-1}$

$\therefore c_n = (7n-5)\cdot 2^{n-1}$

$$\therefore \quad S_n = 2\cdot 2^0 + 9\cdot 2^1 + 16\cdot 2^2 + \cdots + (7n-5)\cdot 2^{n-1}$$

$$-)\ 2S_n = \qquad 2\cdot 2^1 + 9\cdot 2^2 + \cdots + (7n-12)\cdot 2^{n-1} + (7n-5)\cdot 2^n$$

$$\therefore -S_n = 2 + 7(2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}) - (7n-5)\cdot 2^n$$

$$\therefore S_n = -2 - 7\cdot\frac{2(1-2^{n-1})}{1-2} + (7n-5)\cdot 2^n$$

$$= \underline{(7n-12)\cdot 2^n + 12}$$

$133120 = 2^{11} \times 65$

$(7n-12)\cdot 2^n + 12 = 133132 \iff (7n-12)\cdot 2^n = 133120$

単調増加なので解は高々1個．

$\therefore \underline{n = 11}$