2012年 工（工業化・経営工・機械工） 第1問

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ．

(1) 1枚の硬貨をくり返し投げるゲームを行う．このゲームを，表がちょうど4回出たところ，または，裏がちょうど4回出たところで終了することにする．ただし，硬貨を投げたとき，表が出る確率と裏が出る確率はいずれも $\dfrac{1}{2}$ である．

(i) 硬貨を k 回投げたところで終了する確率を p_k とすると，

$$p_4 = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}, \quad p_5 = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}, \quad p_7 = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}\boxed{\text{キ}}}$$

である．

(ii) このゲームが終了するまでに硬貨を投げる回数の期待値は

$$\frac{\boxed{\text{ク}}\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}\boxed{\text{サ}}}$$

である．

(2) $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ の θ に対して，x に関する2次方程式

$$x^2 + (\sqrt{2}\sin 2\theta)x + 2\cos\theta = 0$$

を考える．

(i) この方程式が異なる2つの実数解をもつのは，

$$\boxed{\text{ア}}\boxed{\text{イ}}^\circ < \theta \leqq \boxed{\text{ウ}}\boxed{\text{エ}}\boxed{\text{オ}}^\circ$$

のときである．

以下，この方程式が異なる2つの実数解をもつ場合について考え，この2つの実数解を α，β とする．

(ii) 無限等比級数

$$1 + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)^n + \cdots$$

が収束するのは，

$$\boxed{\text{カ}}\boxed{\text{キ}}\boxed{\text{ク}}^\circ < \theta \leqq \boxed{\text{ケ}}\boxed{\text{コ}}\boxed{\text{サ}}^\circ$$

のときである．

(iii) 無限等比級数

$$1 + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)^n + \cdots$$

が収束して，その和が $2-\sqrt{2}$ となるのは，

$$\theta = \boxed{シ}\boxed{ス}\boxed{セ}\,^\circ$$

のときである．

(3) △OABにおいて，辺ABを2：1の比に内分する点をC（AC：CB＝2：1），線分OCを1：2の比に内分する点をD（OD：DC＝1：2）とする．辺OA上に点Pを，辺OB上に点Qを，線分PQが点Dを通るようにとる．

（i）$\dfrac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OP}} + 2 \times \dfrac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OQ}} = \boxed{ア}$ である．

以下，OA＝2，OB＝3，∠AOB＝60° とする．

（ii）OP＝1のとき，△OPQの面積は

$$\frac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}\boxed{エ}} \times \sqrt{\boxed{オ}}$$

である．

（iii）線分OPの長さと線分OQの長さの和OP＋OQがもっとも小さくなるように点P，Qをとるとき，

$$\mathrm{OP} = \frac{\boxed{カ} + \boxed{キ}\sqrt{\boxed{ク}}}{\boxed{ケ}}$$

である．このとき，

$$\mathrm{OP} + \mathrm{OQ} = \frac{\boxed{コ} + \boxed{サ}\sqrt{\boxed{シ}}}{\boxed{ス}}$$

である．