大阪市立大学

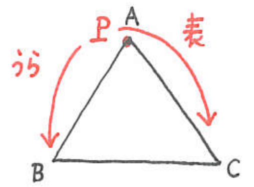
2012年 理系 第2問

数理 石井K

2　三角形ABCの頂点A，B，Cは反時計回りに並んでいるものとする．点Pはいずれかの頂点の位置にあり，1枚の硬貨を1回投げるごとに，表が出れば時計回りに隣の頂点へ，裏が出れば反時計回りに隣の頂点へ，移動するものとする．点Pは最初，頂点Aの位置にあったとする．硬貨を n 回投げたとき，点Pが頂点Aの位置に戻る確率を a_n で表す．次の問いに答えよ．

(1) $n \geqq 2$ に対し a_n を a_{n-1} を用いて表せ．

(2) a_n を求めよ．



(1) $n-1$ 回目に点Pが A にあるとき，n 回目は A にない

a_{n-1}

$n-1$ 回目に点Pが A 以外にあるとき，$\frac{1}{2}$ の確率で n 回目に A に戻る．（Bにあれば表，Cにあればうらが出ればよい）

$1-a_{n-1}$

よって，$a_n = a_{n-1}\cdot 0 + (1-a_{n-1})\cdot\frac{1}{2}$

$\therefore\ a_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a_{n-1}\ \ (n \geqq 2)$ //

(2) $a_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(a_{n-1} - \frac{1}{3}\right)$

$a_1 = 0$

$\therefore$ 数列 $\left\{a_n - \frac{1}{3}\right\}$ は初項 $a_1 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$，公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列

$\therefore\ a_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore\ a_n = \frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$ //