

2011年理系第4問

4  $N, a, b$ は正の整数とする. 箱の中に赤玉が  $a$  個, 白玉が  $b$  個入っている. 箱から無作為に1個の玉を取り出し, 色を記録して箱に戻す. この操作を繰り返し, 同じ色の玉が2回続けて出るか, または取り出す回数が  $2N+2$  になったら終了する.  $n$  回取り出して終わる確率を  $P(n)$  とし,  $p = \frac{a}{a+b}$ ,  $q = \frac{b}{a+b}$ ,  $r = pq$  とおく. 次の問いに答えよ.

(1)  $P(2j), P(2j+1)$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) および  $P(2N+2)$  を  $r$  を用いて表せ.

(2)  $(1-r) \sum_{j=1}^N jr^{j-1} = \frac{1-r^N}{1-r} - Nr^N$  を示せ.

(3) 取り出す回数の期待値  $m = \sum_{n=2}^{2N+2} nP(n)$  について,  $m < \frac{2+r}{1-r}$  となることを示せ.

(4) 上の期待値  $m$  について,  $m < 3$  を示せ.