大阪市立大学

2010年 理系 第4問

$\boxed{4}$ a, b は $a < b$ をみたす実数とする．$f(x)$, $g(x)$ は閉区間 $[\,a,\ b\,]$ で定義された連続関数で，$g(x) \leqq f(x)$ をみたすとする．座標平面上，不等式 $a \leqq x \leqq b$, $g(x) \leqq y \leqq f(x)$ をみたす点 $(x,\ y)$ 全体からなる図形を A とする．A の面積 S が正のとき，A の重心の y 座標は，

$$\frac{1}{S}\int_a^b \frac{\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2}{2}\,dx$$

で与えられる．この事実を用いて，次の問いに答えよ．

(1) r は $0 < r < 1$ をみたす実数とする．不等式 $r^2 \leqq x^2 + y^2 \leqq 1$, $y \geqq 0$ をみたす点 $(x,\ y)$ 全体からなる図形を B とおく．B の重心の y 座標 $Y(r)$ を r を用いて表せ．

(2) t は正の実数とする．不等式 $-1 \leqq x \leqq 1$, $\sqrt{1-x^2} - t \leqq y \leqq \sqrt{1-x^2}$ をみたす点 $(x,\ y)$ 全体からなる図形を C とおく．C の重心の y 座標 $Z(t)$ を t を用いて表せ．

(3) (1) で得られた $Y(r)$ と (2) で得られた $Z(t)$ について，$\displaystyle\lim_{r\to 1-0} Y(r)$ と $\displaystyle\lim_{t\to +0} Z(t)$ の大小を比較せよ．