大阪市立大学

2014年 第4問

$\boxed{4}$ 座標空間内に4点A(0, −1, 0), B(2, t, $1-t$), C(0, s, −1), D(3, 2, 1)がある．ただし，tとsは実数で$t>-1$をみたし，また$\overrightarrow{AB}$と$\overrightarrow{AC}$は垂直であるとする．次の問いに答えよ．

(1) sをtを用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$の両方に垂直で大きさが1のベクトル$\vec{n}=(p,\ q,\ r)$のうち$p>0$となるものをtを用いて表せ．

(3) 4点A，B，C，Dが同一平面に含まれるための必要十分条件は，$t=-\frac{1}{3}$または$t=1$であることを証明せよ．

(1) $\overrightarrow{AB}=(2,\ t+1,\ 1-t)$, $\overrightarrow{AC}=(0,\ s+1,\ -1)$

$\therefore\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(t+1)(s+1)+t-1=0$ $\quad\therefore\ t\neq -1$ より. $\underline{s=-\dfrac{2t}{t+1}}$ //

(2) $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=2p+q(t+1)+r(1-t)=0$ …①

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{-t+1}{t+1}q-r=0$ …②

①，② より. $r=\dfrac{1-t}{1+t}q$, $p=-\dfrac{1+t^2}{1+t}q$

これを，$p^2+q^2+r^2=1$ に代入して，$\left(\dfrac{(1+t^2)^2}{(1+t)^2}+1+\dfrac{(1-t)^2}{(1+t)^2}\right)q^2=1$

$p>0$ より. $\underline{\vec{n}=\left(\sqrt{\dfrac{t^2+1}{t^2+3}},\ -\dfrac{t+1}{\sqrt{(t^2+1)(t^2+3)}},\ \dfrac{t-1}{\sqrt{(t^2+1)(t^2+3)}}\right)}$ //

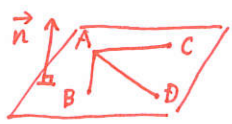
(3) $\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{AB}+l\overrightarrow{AC}$ となる 実数 k, l が存在することが必要十分条件となるので

$(3,3,1)=k(2,\ t+1,\ 1-t)+l\left(0,\ \dfrac{1-t}{t+1},\ -1\right)$

$$\therefore\ \begin{cases}2k=3\\ k(t+1)+\dfrac{1-t}{t+1}l=3\\ k(1-t)-l=1\end{cases}\iff\begin{cases}k=\dfrac{3}{2}\\ \dfrac{3}{2}(t+1)+\dfrac{1-t}{t+1}l=3\\ \dfrac{3}{2}(1-t)-l=1\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}k=\dfrac{3}{2}\\ (3t+1)(t-1)=0\\ \dfrac{3}{2}(1-t)-l=1\end{cases}$$

(別解)
(3)より.
点Dが平面ABC上にある
$\iff\ \overrightarrow{AD}\cdot\vec{n}=0$ を用いてもできる



$\therefore\ t=-\frac{1}{3}$ または $t=1$ ■