大阪市立大学

2015年 理系 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ $a>0$, $b>0$とする．xy平面において，原点を通る傾き正の直線が，直線$y=-a$と交わる点をPとし，直線$x=b$と交わる点をQとする．Pのx座標をpとし，線分PQの長さをLとおくとき，次の問いに答えよ．

(1) L^2をa, b, pを用いて表せ．

(2) a, bを定数とし，pを$p<0$の範囲で変化させるとき，L^2を最小にするpの値を求めよ．

(3) (2)で求めたpの値をp_0とする．また，cを$a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{2}{3}}$を満たす正の実数とする．$p=p_0$のときの$L^2$の値を$c$を用いて表せ．

(1) $P(p, -a)$であり，$-a \neq 0$より $P \neq O$(原点)

∴ この直線の傾きは，$-\frac{a}{p}$である　∴ 直線の式は $y=-\frac{a}{p}x$

∴ $Q\left(b, -\frac{ab}{p}\right)$となる．

∴ $L^2=(p-b)^2+\left(-a+\frac{ab}{p}\right)^2$　　∴ $\underline{L^2=(p-b)^2\left(1+\frac{a^2}{p^2}\right)}$ //

(2) (1)で求めたPの関数を$f(p)$とおくと，

$f'(p)=2(p-b)\cdot\left(1+\frac{a^2}{p^2}\right)+(p-b)^2\cdot\left(-\frac{2a^2}{p^3}\right)$

$=\frac{2(p-b)}{p^3}\cdot(p^3+a^2b)$

∴ $a>0, b>0$より，$p<0$の範囲で$f'(p)=0$となるのは，$p=-\sqrt[3]{a^2b}$

∴ 増減表は右のようになる．

p	$\cdots$	$-\sqrt[3]{a^2b}$	$\cdots$	(0)
$f'(p)$	$-$	0	$+$	
$f(p)$	↘		↗	

∴ L^2を最小にするpは，$\underline{p=-\sqrt[3]{a^2b}}$ //

(3) $p=p_0=-\sqrt[3]{a^2b}$を(1)で求めたL^2の式に代入して，

$L^2=\left(-\sqrt[3]{a^2b}-b\right)^2\left(1+\frac{a^2}{a\cdot\sqrt[3]{ab^2}}\right)$

$=\left(\sqrt[3]{a^2b}+b\right)^2\cdot\left(1+\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{b^2}}\right)$

$=\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}\right)^2\cdot\left(\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{a^2}\right)$

$=\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^3$

$=\underline{c^2}$ //