大阪市立大学

2016年 文系 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ 4面体OABCは，

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}=9,\quad \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3,\quad \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB}=14,$$

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=1,\quad \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=3,\quad \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=5$$

を満たすものとする．また，直線AB上の点Dを，$\overrightarrow{OD}$と$\overrightarrow{AB}$が垂直になるようにとり，実数mを$\overrightarrow{OD}=m\overrightarrow{OA}+(1-m)\overrightarrow{OB}$となるように定める．$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$，$\vec{c}=\overrightarrow{OC}$とおくとき，次の問いに答えよ．

(1) mの値を求めよ．

(2) $m<s<1$を満たす実数sに対し，辺ABを$(1-s):s$に内分する点Pをとる．さらに，直線AC上の点Qを，$\overrightarrow{OP}$と$\overrightarrow{PQ}$が垂直になるようにとり，実数tを$\overrightarrow{OQ}=t\vec{a}+(1-t)\vec{c}$となるように定める．$t$を$s$を用いて表せ．

(3) (2)のtに対し，$0<t<1$が成り立つことを示せ．

(1) $\overrightarrow{OD}\perp\overrightarrow{AB}=0$ であるから，$\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

$\therefore\ \{m\vec{a}+(1-m)\vec{b}\}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$

$\therefore\ 3m-9m+14(1-m)-3(1-m)=0$

$\therefore\ \underline{m=\dfrac{11}{17}}$ //

(2) $\overrightarrow{OP}=s\vec{a}+(1-s)\vec{b}$，$\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{PQ}$ より $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$

$\therefore\ \{s\vec{a}+(1-s)\vec{b}\}\cdot\{(t-s)\vec{a}-(1-s)\vec{b}+(1-t)\vec{c}\}=0$

$\therefore\ 9s(t-s)-3s(1-s)+s(1-t)+3(1-s)(t-s)-14(1-s)^2+3(1-s)(1-t)=0$

$\therefore\ -17s^2+20s+8st-11=0$

$\therefore\ \underline{t=\dfrac{17s^2-20s+11}{8s}}$ //

(3) $17s^2-20s+11=17\left(s-\dfrac{10}{17}\right)^2+\dfrac{87}{17}>0$，$8s>0$ より．$t>0$

$1-t=\dfrac{-17s^2+28s-11}{8s}=-\dfrac{(17s-11)(s-1)}{8s}$

$m<s<1$ より．$17s-11>0$，$s-1<0$　よって．$1-t>0$　$\therefore\ t<1$

以上より．$0<t<1$ ▨