0000035904699999

大阪市立大学

2012年 理系 第3問

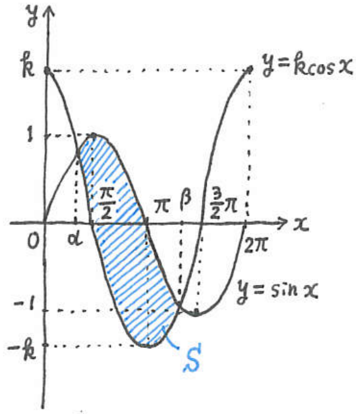
数理 石井K

$\boxed{3}$ $0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲で二つの曲線 $y = \sin x$ と $y = k\cos x$ を考える．ただし，$k > 0$ とする．この二つの曲線の交点の x 座標を α，$\beta\,(0 \leqq \alpha < \beta \leqq 2\pi)$ とし，$\alpha \leqq x \leqq \beta$ の範囲でこの二つの曲線に囲まれた図形の面積を S とする．次の問いに答えよ．

(1) k と β を α を用いて表せ．

(2) S を k を用いて表せ．

(3) $S = 4$ のとき，$\alpha \leqq x \leqq \theta$ の範囲でこの二つの曲線に囲まれた図形の面積が 2 となるような θ の値を求めよ．



(1) $\sin\alpha = k\cos\alpha$ より，$\underline{k = \tan\alpha}$ //

同様に，$k = \tan\beta$ であるから，$\tan\alpha = \tan\beta$

$\therefore 0 \leqq \alpha < \beta \leqq 2\pi$ より，$\underline{\beta = \alpha + \pi}$ //

(2) $S = \int_\alpha^\beta \sin x - k\cos x\, dx$

$= \left[-\cos x - k\sin x\right]_\alpha^\beta$

$= -\cos\beta - k\sin\beta + \cos\alpha + k\sin\alpha$

$= -\cos(\alpha+\pi) - k\sin(\alpha+\pi) + \cos\alpha + k\sin\alpha$

$= 2\cos\alpha + 2k\sin\alpha \quad \cdots ①$

$\tan^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ より，$\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+k^2}$ $\quad \therefore 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ より，$\cos\alpha > 0$ なので，$\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}$

このとき，$\sin\alpha = \dfrac{k}{\sqrt{1+k^2}}$ これらを①に代入して，

$\underline{S = 2\sqrt{1+k^2}}$ //

(3) $4 = 2\sqrt{1+k^2}$ より，$k = \sqrt{3}$

$k = \tan\alpha$ より，$\alpha = \dfrac{\pi}{3}$

$(\alpha, 0)$，$(\beta, 0)$ を結ぶ線分の中点，$\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}, 0\right)$ つまり，$\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}, 0\right)$

$\beta = \alpha + \pi$ を代入した．

図の斜線部分は点$\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}, 0\right)$に関して対称であるから，

$\int_\alpha^{\alpha+\frac{\pi}{2}} \sin x - k\cos x\, dx = \dfrac{S}{2} = 2$ となる．

よって，$\theta = \alpha + \dfrac{\pi}{2} = \underline{\dfrac{5}{6}\pi}$ //