

2016年文系第4問

4 四面体 OABC は、

$$\vec{OA} \cdot \vec{OA} = 9, \quad \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 3, \quad \vec{OB} \cdot \vec{OB} = 14,$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OC} = 1, \quad \vec{OB} \cdot \vec{OC} = 3, \quad \vec{AC} \cdot \vec{BC} = 5$$

を満たすものとする。また、直線 AB 上の点 D を、 \vec{OD} と \vec{AB} が垂直になるようにとり、実数 m を $\vec{OD} = m\vec{OA} + (1-m)\vec{OB}$ となるように定める。 $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$, $\vec{c} = \vec{OC}$ とおくとき、次の問いに答えよ。

(1) m の値を求めよ。

(2) $m < s < 1$ を満たす実数 s に対し、辺 AB を $(1-s) : s$ に内分する点 P をとる。さらに、直線 AC 上の点 Q を、 \vec{OP} と \vec{PQ} が垂直になるようにとり、実数 t を $\vec{OQ} = t\vec{a} + (1-t)\vec{c}$ となるように定める。 t を s を用いて表せ。

(3) (2) の t に対し、 $0 < t < 1$ が成り立つことを示せ。