2018年 理系 第2問

$\boxed{2}$ nを自然数とする．$0 \leqq a_k \leqq 1$をみたす数列$\{a_k\}$に対して

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

とおく．実数xに対して

$$I_n(x) = b_n(1 - a_1 x)(1 - a_2 x)\cdots(1 - a_n x)$$

と定めるとき，次の問いに答えよ．

(1) $a \geqq 0$とする．$x \geqq 0$に対して不等式$1 - ax \leqq e^{-ax}$が成り立つことを示せ．

(2) 不等式$\displaystyle\int_0^1 I_n(x)\,dx \leqq 1$を示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 1$が成り立つとき，

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 I_n(x)\,dx = 1$$

となることを示せ．