大阪市立大学

2018年 理系 第4問

$\boxed{4}$ n を2以上の自然数とし，原点Oを中心とする単位円周上に $2n+1$ 個の相異なる点

$$\mathrm{P}_k\left(\cos\frac{2\pi k}{2n+1},\ \sin\frac{2\pi k}{2n+1}\right) \qquad (k=0,\ 1,\ \cdots,\ 2n)$$

を取る．また整数 j に対して，j を $2n+1$ で割った余りが $k=0,\ 1,\ \cdots,\ 2n$ のとき，$\mathrm{P}_j=\mathrm{P}_k$ と約束する．この記法の下で，

線分 $\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+n}$ と線分 $\mathrm{P}_{k+1}\mathrm{P}_{k+1-n}$ との交点を Q_k $(k=0,\ 1,\ \cdots,\ 2n)$

とおく．点 P_0，Q_0，P_1，Q_1，$\cdots$，P_{2n}，Q_{2n}，P_0 を順に結んでできる折れ線が囲む図形を K_n とし，その面積を A_n とする．このとき次の問いに答えよ．

(1) $\angle\mathrm{OP_0Q_0}$ および $\angle\mathrm{P_0OQ_0}$ の値を n を用いて表せ．

(2) (1) で求めた $\angle\mathrm{OP_0Q_0}$ の値を θ_n とおく．三角形 $\triangle\mathrm{OP_0Q_0}$ の面積を θ_n を用いて表せ．

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}A_n$ を求めよ．