0001543906548999

龍谷大学

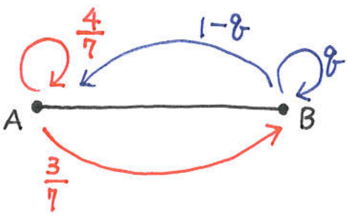
2013年 理系 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ 異なる2点A，Bがあり，その2点間を次のように移動する点Pを考える．

- 点Pが点A上にあるとき，表が出る確率が $\frac{4}{7}$，裏が出る確率が $\frac{3}{7}$ であるようなコインを投げて，表が出ればAにとどまり，裏が出れば点Bに移動する．
- 点Pが点B上にあるとき，表が出る確率が q，裏が出る確率が $1-q$ であるようなコインを投げて，表が出ればBにとどまり，裏が出れば点Aに移動する．

点Pは最初に点A上にあるとし，コインを n 回投げた後に，点Pが点A上にある確率を p_n で表す（$n=1, 2, 3, \cdots$）．このとき，次の問いに答えなさい．



(1) p_2 を q で表しなさい．

(2) p_{n+1} を p_n と q で表しなさい．

(3) $q=\frac{5}{7}$ のとき p_n を n で表しなさい．

(1) $A \to A \to A$ ，$A \to B \to A$ の2通りでそれぞれ確率は，

$\left(\frac{4}{7}\right)^2$ ， $\frac{3}{7} \times (1-q)$ なので， $p_2 = \left(\frac{4}{7}\right)^2 + \frac{3}{7}(1-q) = \underline{\frac{37}{49} - \frac{3}{7}q}$ //

(2) $\cdots \underset{n回後}{A} \to \underset{n+1回後}{A}$ ， $\cdots \underset{n回後}{B} \to \underset{n+1回後}{A}$ の2通り ∴(1)と同様に考えると．

$$p_{n+1} = p_n \times \frac{4}{7} + (1-p_n)\times(1-q) = \underline{\left(q-\frac{3}{7}\right)p_n + 1 - q}$$ //

(3) (2)の結果に $q=\frac{5}{7}$ を代入して．

$$p_{n+1} = \frac{2}{7}p_n + \frac{2}{7}$$

$$\therefore p_{n+1} - \frac{2}{5} = \frac{2}{7}\left(p_n - \frac{2}{5}\right)$$

∴数列 $\left\{p_n - \frac{2}{5}\right\}$ は初項 $p_1 - \frac{2}{5} = \frac{4}{7} - \frac{2}{5} = \frac{6}{35}$ ，公比 $\frac{2}{7}$ の等比数列

$$\therefore p_n - \frac{2}{5} = \frac{6}{35}\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \underline{p_n = \frac{3}{5}\left(\frac{2}{7}\right)^n + \frac{2}{5}}$$ //