同志社大学

2014年 理工学部 第4問　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{4}$ Oを原点とする座標平面において，曲線 $C_1 : y = \log x + \log t$ と曲線 $C_2 : y = ax^2$ を考える．ただし a と t は正の実数である．曲線 C_1 と C_2 は共有点Pを持ち，また，Pにおける C_1 と C_2 の接線が一致するものとする．次の問いに答えよ．

(1) Pの x 座標を x_0 とする．x_0，a，t の間に成立する関係式を書け．

(2) x_0 と a をそれぞれ t を用いて表せ．

(3) Pにおける C_2 の法線を ℓ とする．また，ℓ と x 軸の交点をQ，ℓ と y 軸の交点をRとする．△OQRの面積 $S(t)$ を求め，また，$S(t)$ を最小とする t の値を求めよ．

(4) t が(3)で求めた値のとき，曲線 C_1，C_2 と x 軸が囲む図形の面積を求めよ．

(1) C_1 において，$y' = \dfrac{1}{x}$，C_2 において $y' = 2ax$ より，

$$\underline{\log x_0 + \log t = ax_0^2 \quad \text{かつ} \quad \frac{1}{x_0} = 2ax_0}$$

$\left(\Longleftrightarrow \ ax_0^2 = \dfrac{1}{2},\ x_0 t = \sqrt{e} \right)$

ここまで計算してもOK!

(2) (1)より，$\log x_0 + \log t = ax_0^2$ に $ax_0^2 = \dfrac{1}{2}$ を代入して，$\log x_0 + \log t = \dfrac{1}{2}$

$\therefore\ tx_0 = \sqrt{e} \qquad \therefore\ \underline{x_0 = \dfrac{\sqrt{e}}{t}}$

$\therefore\ a \cdot \dfrac{e}{t^2} = \dfrac{1}{2} \qquad \therefore\ \underline{a = \dfrac{t^2}{2e}}$

(3) ℓ の傾きは，$-\dfrac{1}{2ax_0} = -\dfrac{\sqrt{e}}{t}$ $\quad \therefore\ \ell : y = -\dfrac{\sqrt{e}}{t}\left(x - \dfrac{\sqrt{e}}{t}\right) + \dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \ell : y = -\dfrac{\sqrt{e}}{t}x + \dfrac{e}{t^2} + \dfrac{1}{2} \qquad \therefore\ Q\left(\dfrac{\sqrt{e}}{t} + \dfrac{t}{2\sqrt{e}},\ 0\right),\ R\left(0,\ \dfrac{e}{t^2} + \dfrac{1}{2}\right)$

$$\therefore\ S(t) = \frac{1}{2}\left|\frac{e\sqrt{e}}{t^3} + \frac{\sqrt{e}}{2t} + \frac{e}{2\sqrt{e}\,t} + \frac{t}{4\sqrt{e}}\right|$$

$$= \underline{\frac{e\sqrt{e}}{2t^3} + \frac{\sqrt{e}}{2t} + \frac{t}{8\sqrt{e}}}$$

$$S'(t) = \frac{(t+\sqrt{6e})(t-\sqrt{6e})(t^2+2e)}{8\sqrt{e}\,t^4}$$

t	(0)	$\cdots$	$\sqrt{6e}$	$\cdots$
$S'(t)$		$-$	0	$+$
$S(t)$		$\searrow$		$\nearrow$

$t > 0$ より，$S'(t) = 0$ となるのは，$t = \sqrt{6e}$

$\therefore\ S(t)$ の最小値は，$S(\sqrt{6e}) = \dfrac{2\sqrt{6}}{9}$ で このとき，$\underline{t = \sqrt{6e}}$

2014 年 理工学部 第 4 問　　2枚目/2枚

数理 石井K

4 O を原点とする座標平面において，曲線 $C_1 : y = \log x + \log t$ と曲線 $C_2 : y = ax^2$ を考える．ただし a と t は正の実数である．曲線 C_1 と C_2 は共有点 P を持ち，また，P における C_1 と C_2 の接線が一致するものとする．次の問いに答えよ．

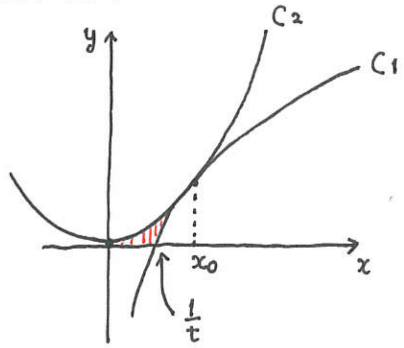
(1) P の x 座標を x_0 とする．x_0，a，t の間に成立する関係式を書け．

(2) x_0 と a をそれぞれ t を用いて表せ．

(3) P における C_2 の法線を ℓ とする．また，ℓ と x 軸の交点を Q，ℓ と y 軸の交点を R とする．△OQR の面積 $S(t)$ を求め，また，$S(t)$ を最小とする t の値を求めよ．

(4) t が (3) で求めた値のとき，曲線 C_1，C_2 と x 軸が囲む図形の面積を求めよ．

(4) 右のグラフより，



$$S = \int_0^{\frac{1}{t}} ax^2\,dx + \int_{\frac{1}{t}}^{x_0} ax^2 - \log x - \log t \; dx$$

$$= \left[\frac{a}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{t}} + \left[\frac{a}{3}x^3 - x\cdot\log t\right]_{\frac{1}{t}}^{x_0} - \int_{\frac{1}{t}}^{x_0} (x)'\log x\,dx$$

$$= \frac{a}{3t^3} + \frac{a}{3}x_0^3 - x_0\log t - \frac{a}{3t^3} + \frac{1}{t}\log t - \left[x\log x\right]_{\frac{1}{t}}^{x_0} + \int_{\frac{1}{t}}^{x_0} dx$$

$$= \frac{a}{3}x_0^3 - x_0\log t + \frac{1}{t}\log t - x_0\log x_0 + \frac{1}{t}\log\frac{1}{t} + x_0 - \frac{1}{t}$$

$$= \frac{a}{3}x_0^3 - x_0\log t x_0 + x_0 - \frac{1}{t}$$

$a = \frac{6e}{2e} = 3$

これに，$t = \sqrt{6e}$，$x_0 = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{6e}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$ を代入して．

$$S = \frac{1}{6\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}}\log\sqrt{e} + \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6e}}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{9} - \frac{1}{\sqrt{6e}}$$