

2011年 医学部 第1問

1 以下の問いに答えよ.

(1) 関数

$$f(x) = x \sin^2 x \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

の最大値を与える  $x$  を  $\alpha$  とするとき,  $f(\alpha)$  を  $\alpha$  の分数式で表すと  となる.

(2) 多項式

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2$$

を因数分解すると  となる.

(3)  $N$  を与えられた自然数とし,  $f(x)$  および  $g(x)$  を区間  $(-\infty, \infty)$  で  $N$  回以上微分可能な関数とする.  $f(x)$  と  $g(x)$  から定まる関数を次のように定義する.  $t$  を与えられた実数として,

$$\begin{aligned} (f *_t g)(x) &= \sum_{k=0}^N \frac{t^k}{2^k k!} f^{(k)}(x) g^{(k)}(x) \\ &= f(x)g(x) + \frac{t}{2} f'(x)g'(x) + \cdots + \frac{t^N}{2^N N!} f^{(N)}(x)g^{(N)}(x) \end{aligned}$$

とおく. ここに,  $f^{(k)}(x)$  は  $f(x)$  の第  $k$  次導関数である ( $g^{(k)}(x)$  も同様である).  $a$  を実数,  $n$  を  $N$  以下の自然数とする.  $f(x) = e^{2ax}$ ,  $g(x) = x^n$  にたいし, 二項定理を用いて  $(f *_t g)(x)$  を計算すると  となる.

(4) 関係式

$$f(x) + \int_0^x f(t)e^{x-t} dt = \sin x$$

をみたす微分可能な関数  $f(x)$  を考える.  $f(x)$  の導関数  $f'(x)$  を求めると,  $f'(x) =$   となる.  $f(0) =$   であるから  $f(x) =$   となる.