大阪薬科大学

2016年 薬学部 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 次の問いに答えなさい．

点Oを原点とする xy 座標平面上に点A(2, 4)と点B(5, 2)，および直線 ℓ がある．

(1) ℓ の方程式は $y=\dfrac{1}{2}(-x+1)$ である．

(i) 点Pが ℓ 上の点であるとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の値を求めよ．

(ii) ℓ 上のPに対し，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2$ のとり得る最小の値を求めよ．

(2) a を1以上の定数とする．xy 座標平面上の点Qが，線分AQの中点Mを用いて，

$$a|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|^2=4|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|^2+4|\overrightarrow{\mathrm{BM}}|^2$$

を満たしながら動くとき，そのQの軌跡を C とする．

(i) C が直線となるときの a の値を求めよ．

(ii) $a=1$ のとき，C 上のQに対し，$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2$ のとり得る最小の値を求めよ．

(1)(i) $P\left(t,\ \frac{1}{2}(-t+1)\right)$ とおくと．

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=2\cdot t+4\cdot\frac{1}{2}(-t+1)$$
$$=\underline{2}\ //$$

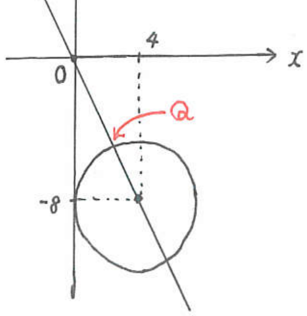
(ii) $|\overrightarrow{OP}|^2=t^2+\left\{\frac{1}{2}(-t+1)\right\}^2$
$$=\frac{5}{4}t^2-\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}$$
$$=\frac{5}{4}\left(t-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{1}{5}$$

$\therefore$ $\underline{最小値は\ \frac{1}{5}}$ //

(2) $Q(x, y)$ とおくと，$M\left(\frac{x}{2}+1,\ \frac{y}{2}+2\right)$

(i) $\therefore$ 与式より，$a\{(x-2)^2+(y-4)^2\}=4\left\{\left(\frac{x}{2}+1\right)^2+\left(\frac{y}{2}+2\right)^2\right\}+4\left\{\left(\frac{x}{2}-4\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2\right\}$
$$=(x+2)^2+(y+4)^2+(x-8)^2+y^2\ \cdots(*)$$

$\therefore$ これが直線の方程式になるのは $\underline{a=2}$ //



(ii) $(*)$ に $a=1$ を代入して，$(x-4)^2+(y+8)^2=16$

これは，中心 $(4, -8)$，半径4の円であるから，

原点と中心を結ぶ直線 $y=-2x$ と円の交点のうち，原点に近い方をQとしたとき，$|\overrightarrow{OQ}|^2$ は最小となり，そのとき

$|\overrightarrow{OQ}|=\sqrt{4^2+(-8)^2}-4=4\sqrt{5}-4$ $\therefore$ $\underline{|\overrightarrow{OQ}|^2=96-32\sqrt{5}}$ //