岐阜大学

2014年 第4問

4 次の問に答えよ．

(1) a，$b>0$とする．このとき

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

であることを証明せよ．また，等号が成立するのは$a=b$の場合だけであることを示せ．

(1) (左辺)−(右辺) $= \frac{1}{2}(a+b-2\sqrt{ab})$

$= \frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$

$\geqq 0$ （等号成立は $a=b$ のとき）▨

(2) a，b，$c>0$とする．このとき

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqq 8abc$$

であることを証明せよ．また，等号が成立するのはどのような場合か述べよ．

(2) (左辺)−(右辺) $= abc + ac^2 + b^2c + bc^2 + a^2b + a^2c + ab^2 + abc - 8abc$

$= a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2$

$\geqq 0$

（等号成立は $a=b=c$ のとき）▨

(3) α，β，γを三角形の3辺の長さとする．このとき

$$\alpha\beta\gamma \geqq (-\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)$$

であることを証明せよ．また，等号が成立するのは正三角形の場合だけであることを示せ．

(4) α，β，γを三角形の3辺の長さとする．このとき

$$\frac{\alpha}{-\alpha+\beta+\gamma} + \frac{\beta}{\alpha-\beta+\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta-\gamma} \geqq 3$$

であることを証明せよ．また，等号が成立するのは正三角形の場合だけであることを示せ．

(3) (2)において．$a = -\alpha+\beta+\gamma$，$b = \alpha-\beta+\gamma$，$c = \alpha+\beta-\gamma$ とおくと．

三角形の成立条件より．$a>0$，$b>0$，$c>0$

$\therefore\ 2\gamma \cdot 2\alpha \cdot 2\beta \geqq 8(-\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)$

$\therefore\ \alpha\beta\gamma \geqq (-\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)$

等号成立は．(2)の条件より，$a=b=c$ すなわち．$\alpha=\beta=\gamma$

すなわち．正三角形のときのみである ▨

(4) (3)と同様に $a=-\alpha+\beta+\gamma$，$b=\alpha-\beta+\gamma$，$c=\alpha+\beta-\gamma$ とおくと，

$\alpha = \frac{b+c}{2}$，$\beta = \frac{c+a}{2}$，$\gamma = \frac{a+b}{2}$ であるから

(左辺) $= \dfrac{\frac{1}{2}(b+c)}{a} + \dfrac{\frac{1}{2}(a+c)}{b} + \dfrac{\frac{1}{2}(a+b)}{c}$

$= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right) + \left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right) + \left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)\right\}$

$\geqq \frac{1}{2}\left\{2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}} + 2\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{c}} + 2\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{c}}\right\}$ ← (1)より

$\geqq 3$

等号成立は $a=b=c$

すなわち $\alpha=\beta=\gamma$

$\therefore$ 正三角形のときのみである ▨