新潟大学

2015年 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ △ABC の外心を O とし，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする．$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=5,\quad 4\vec{a}+3\vec{b}+5\vec{c}=\vec{0}$$

をみたすとする．次の問いに答えよ．

(1) $100+3\vec{a}\cdot\vec{b}+5\vec{c}\cdot\vec{a}=0$ が成り立つことを示せ．

(2) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$ および $\vec{c}\cdot\vec{a}$ を求めよ．

(3) △ABC の重心を G とするとき，$|\overrightarrow{OG}|$ の値を求めよ．

別解

(1) は この式 より

$\vec{a}\cdot(4\vec{a}+3\vec{b}+5\vec{c})=0$

$\therefore 4|\vec{a}|^2+3\vec{a}\cdot\vec{b}+5\vec{c}\cdot\vec{a}=0$

$\therefore 100+3\vec{a}\cdot\vec{b}+5\vec{c}\cdot\vec{a}=0$

とすれば 速かった・・・

(1) $4\vec{a}+3\vec{b}+5\vec{c}=\vec{0}$ より．$4\vec{a}+3\vec{b}=-5\vec{c}$

両辺を2乗して，$16|\vec{a}|^2+24\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2=25|\vec{c}|^2$

$\therefore |\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|$ より，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ …①

同様に，$4\vec{a}+5\vec{c}=-3\vec{b}$ の両辺を2乗して，

$16|\vec{a}|^2+40\vec{c}\cdot\vec{a}+25|\vec{c}|^2=9|\vec{b}|^2$

$\therefore \vec{c}\cdot\vec{a}=-20$ …②

①，②より．$100+3\vec{a}\cdot\vec{b}+5\vec{c}\cdot\vec{a}=100+0-100=0$ ▨

(2) (1) の ① より．$\underline{\vec{a}\cdot\vec{b}=0}$ //，② より $\underline{\vec{c}\cdot\vec{a}=-20}$ //

また，$3\vec{b}+5\vec{c}=-4\vec{a}$ より $9|\vec{b}|^2+30\vec{b}\cdot\vec{c}+25|\vec{c}|^2=16|\vec{a}|^2$

$\therefore \underline{\vec{b}\cdot\vec{c}=-15}$ //

(3) $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ より $|\overrightarrow{OG}|^2=\frac{1}{9}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a})$

$=\frac{1}{9}(75-40-30)$

$=\frac{5}{9}$

$\therefore \underline{|\overrightarrow{OG}|=\frac{\sqrt{5}}{3}}$ //