

2015年 第4問

4 数列 $\{a_n\}$ は初項が $a_1 = 1$ 、公差が正の定数 d の等差数列とする。このとき、自然数の定数 p を用いて

$$b_n = a_n a_{n+p} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定まる数列 $\{b_n\}$ について考える。ただし、 $a_n a_{n+p}$ は a_n と a_{n+p} の積を表す。以下の問いに答えよ。

- (1) 数列 $\{b_n\}$ の階差数列 $\{c_n\}$ が等差数列であることを示せ。さらに、数列 $\{c_n\}$ の初項 c_1 と公差 D を d, p を用いて表せ。
- (2) ある定数 C を用いて

$$\frac{1}{b_n} = C \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+p}} \right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と表すことができる。このとき、 C を d, p を用いて表せ。

以下の問いでは、数列 $\{b_n\}$ が初項から順に

$$b_1 = 7, \quad b_2 = 40, \quad b_3 = 91, \quad \dots$$

となる場合を考える。

- (3) 定数 d, p および数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ。
- (4) 数列 $\{b_n\}$ に対して、

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{b_k} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

とおく。極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。