2016年 理工学部 第2問

$\boxed{2}$ $f(x)$ は2次関数であり，$f(0)=f(1)=0$ を満たすとする．

(1) $a=\dfrac{1}{2}f''(0)$ とする．このとき，$f(x)$ は a を用いて $f(x)=\boxed{\text{キ}}$ と表される．

(2) 定積分

$$\int_0^1 \{(f'(x)-x)^2-f(x)\}\,dx$$

の値が最も小さくなるのは $f(x)=\boxed{\text{ク}}$ のときである．また，そのときの定積分の値は $\boxed{\text{ケ}}$ である．
以下では，$f(x)=\boxed{\text{ク}}$，$m=\boxed{\text{ケ}}$ とする．

(3) 関数 $h(x)$ は $h(0)=h(1)=0$ を満たし，その導関数 $h'(x)$ は連続であるとする．さらに，I と J を

$$I=\int_0^1 \{(f'(x)+h'(x)-x)^2-(f(x)+h(x))\}\,dx$$

$$J=\int_0^1 \{(f'(x)-x)^2-f(x)\}\,dx+\int_0^1 (h'(x))^2\,dx$$

で定める．このとき，等式

$$I=J$$

を証明しなさい．

(4) 関数 $g(x)$ は $g(0)=g(1)=0$ を満たし，その導関数 $g'(x)$ は連続であるとする．このとき，不等式

$$\int_0^1 \{(g'(x)-x)^2-g(x)\}\,dx \geqq m$$

を証明しなさい．