

2017年工学部第2問

2 次の空所を埋めよ。

- (1) 平面上の2つのベクトル $\vec{a} = (1, \sqrt{3})$, $\vec{b} = (\sin\theta, \cos\theta)$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) を考える。このとき、 $|\vec{a}| = \boxed{\text{ア}}$, $|\vec{b}| = \boxed{\text{イ}}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2\sin(\theta + \boxed{\text{ウ}})$ である。
ただし、 $0 < \boxed{\text{ウ}} < 2\pi$ とする。さらに、 \vec{a} と \vec{b} のなす角が $\frac{\pi}{5}$ のとき、 $\theta = \boxed{\text{エ}}$ である。
- (2) 変数 x のデータの値が 3, 9, 1, 7, 5 であるとき、 x の分散は $\boxed{\text{オ}}$ である。また、変数 $9-x$ と x の相関係数は $\boxed{\text{カ}}$ である。

$$(1) |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \underline{2}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta} = \underline{1}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= 1 \cdot \sin\theta + \sqrt{3} \cdot \cos\theta \\ &= 2 \left(\sin\theta \cdot \frac{1}{2} + \cos\theta \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \underline{2 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{5} &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \\ &= \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)\right) \end{aligned}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right)$$

$$= \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$0 \leq \theta \leq \pi \text{ より } -\frac{\pi}{6} \leq \theta - \frac{\pi}{6} \leq \frac{5}{6}\pi$$

$$\therefore \theta - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{5}$$

$$\therefore \theta = \underline{\frac{11}{30}\pi}$$



$$(2) \bar{x} = \frac{1}{5}(3+9+1+7+5) = 5$$

$$\begin{aligned} \therefore Sx^2 &= \frac{1}{5}(2^2+4^2+4^2+2^2+0^2) \\ &= \underline{8} \end{aligned}$$

$$y = 9-x \text{ とおくと}$$

$$y \text{ の } \bar{y} \text{ の値は } 6, 0, 8, 2, 4$$

$$\begin{aligned} \therefore \bar{y} &= \frac{1}{5}(6+0+8+2+4) \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore Sy^2 &= \frac{1}{5}(2^2+4^2+4^2+2^2+0^2) \\ &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Sxy &= \frac{1}{5}(-2 \cdot 2 + 4 \cdot (-4) + (-4) \cdot 4 \\ &\quad + 2 \cdot (-2) + 0 \cdot 0) \\ &= -8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore r &= \frac{Sxy}{Sx Sy} \\ &= \frac{-8}{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}} \\ &= \underline{-1} \end{aligned}$$