0001627632738999

慶應義塾大学

2014 年 薬学部 第 1 問　　1枚目／4枚

数理 石井K

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ．

(1) 実数 x の関数 $f(x) = x^3 - ax^2 + bx + 4b - 2$ は，$\displaystyle\lim_{x\to4}\frac{f(x)}{x-2} = -5$ を満たす．ただし，a，b は実数とする．このとき，

(i) b を a の式で表すと，$b = \overset{2}{\boxed{1}}\,a - \overset{9}{\boxed{2}}$ である．

(ii) x の値が 3 から 6 まで変化するときの関数 $f(x)$ の平均変化率が，関数 $f(x)$ の $x = 2+\sqrt{7}$ における微分係数に等しいとき，$a = \underset{6}{\boxed{3}}$，$b = \underset{3}{\boxed{4}}$ である．

(2) 実数 a についての方程式

$$A = \left|2a + \frac{4}{3}k\right| + \left|a - \frac{8}{9}k\right|$$

において，$a = \dfrac{1}{4}$ のとき $A = \dfrac{21}{4}$ である．ただし，k は正の実数の定数とする．このとき，

(i) $k = \dfrac{9\,\boxed{5}}{4\,\boxed{6}}$ である．

(ii) A の最小値は $\dfrac{\boxed{7}\,7}{\boxed{8}\,2}$ であり，このときの a の値は $\dfrac{\overset{-}{\boxed{9}}\overset{3}{\boxed{10}}}{\boxed{11}\,2}$ である．

(3) n を自然数とする．数列 $\{a_n\}$ は，$a_1 = 5$，$a_{n+1} = \dfrac{25}{{a_n}^2}$ を満たす．このとき，

(i) $a_3 = \overset{2}{\boxed{12}}\overset{5}{\boxed{13}}$，$a_4 = \dfrac{\boxed{14}\,1}{\boxed{15}\,\boxed{16}\,25}$ である．

(ii) $b_n = \log_5 a_n$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を n の式で表すと，

$$b_n = \frac{(\overset{-}{\boxed{17}}\overset{2}{\boxed{18}})^{n-1}}{\boxed{19}\,3} + \frac{\boxed{20}\,2}{\boxed{21}\,3}$$

である．

(4) 円に内接する四角形 ABCD において，$\angle\mathrm{BCD} = 60^\circ$，$\mathrm{CD} = 2\sqrt{6}$，$\angle\mathrm{DAB} > \angle\mathrm{CDA}$ である．また 2 直線 BA，CD の交点を E，2 直線 DA，CB の交点を F とすると，$\angle\mathrm{AFB} = 45^\circ$，$\mathrm{DE} = 3\sqrt{2} - \sqrt{6}$ である．このとき，

(i) $\angle\mathrm{AED}$ の大きさは $\overset{1}{\boxed{22}}\overset{5}{\boxed{23}}^\circ$ であり，辺 EB の長さは $\overset{6}{\boxed{24}}$ である．

(ii) 三角形 AED の面積は，三角形 CEB の面積の $\dfrac{\overset{2}{\boxed{25}} - \sqrt{\boxed{26}}\,3}{\boxed{27}\,3}$ 倍である．

(5) xy 平面上に放物線 $C: 2x^2 + (k-5)x - (k+1)y + 6k - 14 = 0$ と直線 $\ell: y = \dfrac{1}{2}x$ がある．k は $k \neq -1$ を満たす実数とする．放物線 C は -1 を除くすべての実数 k に対して 2 定点 $\mathrm{A}(x_\mathrm{A},\ y_\mathrm{A})$，$\mathrm{B}(x_\mathrm{B},\ y_\mathrm{B})$ を通る．ただし，$x_\mathrm{A} < x_\mathrm{B}$ とする．このとき，

(i) 2 点 A，B の座標は

$$(x_\mathrm{A},\ y_\mathrm{A}) = (\overset{-}{\boxed{28}}\overset{2}{\boxed{29}},\ \overset{4}{\boxed{30}}),\quad (x_\mathrm{B},\ y_\mathrm{B}) = (\overset{5}{\boxed{31}},\ \overset{1}{\boxed{32}}\overset{1}{\boxed{33}})$$

である．

2枚目／4枚

数理 石井K

（ii）直線 ℓ 上に点 P をおき，2 点 A，B をそれぞれ点 P と線分で結ぶとき，距離の和 AP＋BP を最小にする点 P の座標は $\left(\dfrac{\boxed{34}\boxed{35}}{\boxed{36}}, \dfrac{\boxed{37}\boxed{38}}{\boxed{39}} \right)$ である．

$\frac{28}{9}$　$\frac{14}{9}$

(1) (i) $f(4) = 64 - 16a + 4b + 4b - 2$

$= -16a + 8b + 62$

$\therefore \lim_{x \to 4} \dfrac{f(x)}{x-2} = \dfrac{f(4)}{2} = -8a + 4b + 31$

$\therefore -8a + 4b + 31 = -5$ より．$\underline{b = 2a - 9}$ //

(ii) $f'(x) = 3x^2 - 2ax + b$

$\dfrac{f(6) - f(3)}{6 - 3} = f'(2+\sqrt{7})$ より．$\dfrac{216 - 36a + 6b + 4b - 2 - (27 - 9a + 3b + 4b - 2)}{3} = 3(2+\sqrt{7})^2 - 2a(2+\sqrt{7}) + b$

$\therefore \dfrac{189 - 27a + 3b}{3} = 33 + 12\sqrt{7} - 4a - 2\sqrt{7}a + b$

$\therefore a = \dfrac{30 - 12\sqrt{7}}{5 - 2\sqrt{7}} = \dfrac{(30 - 12\sqrt{7})(5 + 2\sqrt{7})}{(5 - 2\sqrt{7})(5 + 2\sqrt{7})} = 6$　　$\therefore \underline{a = 6, b = 3}$ //

(2) (i) $a = \frac{1}{4}$，$A = \frac{21}{4}$ を代入して．

$\frac{21}{4} = \left| \frac{1}{2} + \frac{4}{3}k \right| + \left| \frac{1}{4} - \frac{8}{9}k \right|$

ここで，$k > 0$ より．$\frac{1}{2} + \frac{4}{3}k > 0$

① $\frac{1}{4} - \frac{8}{9}k \geqq 0$ すなわち，$0 < k \leqq \frac{9}{32}$ のとき．

$\frac{21}{4} = \frac{1}{2} + \frac{4}{3}k + \frac{1}{4} - \frac{8}{9}k$　　$\therefore k = \frac{81}{8}$　これは $0 < k \leqq \frac{9}{32}$ をみたさず不適

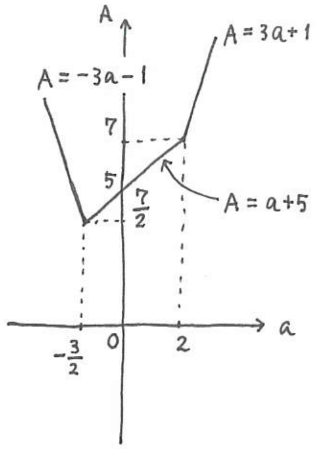
② $\frac{1}{4} - \frac{8}{9}k < 0$ すなわち $k > \frac{9}{32}$ のとき．

$\frac{21}{4} = \frac{1}{2} + \frac{4}{3}k + \frac{8}{9}k - \frac{1}{4}$　　$\therefore k = \frac{9}{4}$

①，② より．$\underline{k = \frac{9}{4}}$ //

3枚目／4枚

数理 石井K



(2) のつづき.

(ii) $A = |2a+3| + |a-2|$

・ $a \leqq -\frac{3}{2}$ のとき. $A = -3a-1$

・ $-\frac{3}{2} < a \leqq 2$ のとき. $A = a+5$

・ $a > 2$ のとき. $A = 3a+1$

よって右のグラフより, $\underline{A の最小値は. \frac{7}{2}}$ //

そのとき. $\underline{a = -\frac{3}{2}}$ //

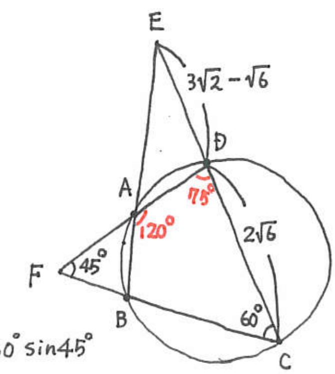
(3) (i) $a_2 = \frac{25}{a_1^2} = \frac{25}{5^2} = 1$, $\underline{a_3 = \frac{25}{a_2^2} = 25}$ // , $\underline{a_4 = \frac{25}{a_3^2} = \frac{1}{25}}$ //

(ii) $a_{n+1} = \frac{25}{a_n^2}$ の両辺対数をとって. $\log_5 a_{n+1} = 2 - 2\log_5$

$\therefore b_{n+1} = 2 - 2b_n$ $\quad \therefore b_{n+1} - \frac{2}{3} = -2\left(b_n - \frac{2}{3}\right)$

∴数列 $\left\{b_n - \frac{2}{3}\right\}$ は初項 $b_1 - \frac{2}{3} = \log_5 a_1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, 公比 -2 の等比数列

$\therefore b_n - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\cdot(-2)^{n-1}$ $\quad \therefore \underline{b_n = \frac{(-2)^{n-1}}{3} + \frac{2}{3}}$ //



(4) (i) 四角形ABCDは円に内接しているので, $\angle BAD = 120°$

$\triangle DFC$ において内角の和は180°より, $\angle FDC = 180° - 45° - 60° = 75°$

$\therefore \angle EAD = 60°$, $\angle EDA = 105°$ $\quad \therefore \underline{\angle AED = 15°}$ //

$\angle ABC = 105°$ と正弦定理より.

$$\frac{EB}{\sin 60°} = \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sin 105°}$$

ここで, $\sin(60°+45°) = \sin 60° \cos 45° + \cos 60° \sin 45°$

$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\therefore EB = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4(3\sqrt{2}+\sqrt{6})}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \underline{6}$ //

(ii) 方べきの定理より. $EA \cdot 6 = (3\sqrt{2}-\sqrt{6})\cdot(3\sqrt{2}+\sqrt{6})$ $\quad \therefore EA = 2$

$\therefore \triangle AED = \frac{1}{2}\cdot 2 \cdot (3\sqrt{2}-\sqrt{6})\cdot \sin 15°$, $\triangle CEB = \frac{1}{2}\cdot 6 \cdot (3\sqrt{2}+\sqrt{6})\cdot \sin 15°$ より.

数理 石井K

(4) の (ii) のつづき.

$$\therefore \frac{\triangle AED}{\triangle CEB} = \frac{2(3\sqrt{2}-\sqrt{6})}{6(3\sqrt{2}+\sqrt{6})} = \frac{24-12\sqrt{3}}{3\cdot 12} = \underline{\frac{2-\sqrt{3}}{3}} //$$

(5). (i) $C: k(x-y+6)+2x^2-5x-y-14=0$

$\therefore$ 定点 A, B は, $x-y+6=0$ と $2x^2-5x-y-14=0$ の交点,

$\therefore 2x^2-5x-x-6-14=0$

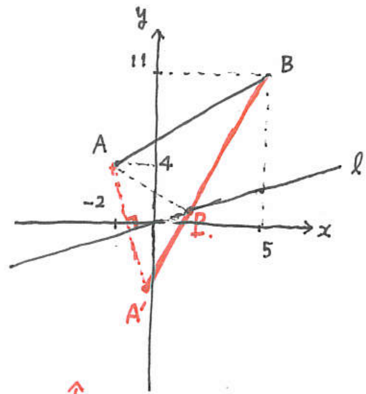
$\therefore x^2-3x-10=0$

$(x-5)(x+2)=0 \quad \therefore x=5, -2$

$x_A < x_B$ より, $x_A=-2$, $x_B=5$ このとき, $y_A=4$, $y_B=11$

$\therefore \underline{(x_A, y_A)=(-2, 4), (x_B, y_B)=(5, 11)} //$

(ii) 点 A を ℓ に関して対称に移動させた点を A′ とすると,



(注) この図の A′ は少しずれている.

$AP+BP=A'P+BP$.

よって P が直線 A′B 上にあるとき最小になる.

$A'(x, y)$ とおくと,

$AA' \perp \ell$ より, $\frac{y-4}{x+2}\cdot\frac{1}{2}=-1 \quad \therefore 2x+y=0 \cdots ①$

線分 AA′ の中点は $\left(\frac{x-2}{2}, \frac{y+4}{2}\right)$ で ℓ 上にあるので,

$$\frac{y+4}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x-2}{2} \quad \therefore x-2y=10 \cdots ②$$

①, ② より, $A'(2, -4)$

$\therefore$ 直線 A′B : $y=\frac{11+4}{5-2}(x-2)-4 \quad \therefore y=5x-14$

これと ℓ の交点, は. $\underline{\left(\frac{28}{9}, \frac{14}{9}\right)} //$