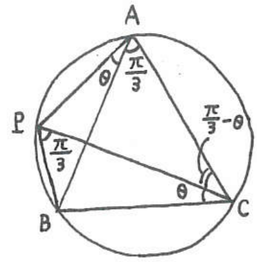
2014年 第2問　1枚目／2枚

数理 石井K

2　一辺の長さが2の正三角形ABCと，その外接円Oがある．弧AB上の点Pは，$\angle BCP = \theta$が$0 < \theta < \frac{\pi}{3}$を満たすように動く．次の問いに答えよ．

(1) 線分PBの長さをθを用いて表せ．
(2) $PA + PB + PC$の最大値を求めよ．
(3) $PA^2 + PB^2 + PC^2$は一定であることを示せ．
(4) $PA \cdot PB \cdot PC$の最大値を求めよ．



(1) 正弦定理より，外接円の半径Rは，

$$\frac{2}{\sin\frac{\pi}{3}} = 2R \qquad \therefore R = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$\triangle PBC$において，正弦定理より，$\frac{PB}{\sin\theta} = 2R$　$\therefore \underline{PB = \frac{4\sqrt{3}}{3}\sin\theta}$ // …①

(2) 同様に正弦定理より，

$$\frac{PA}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)} = 2R, \quad \frac{PC}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)} = 2R$$

よって，$PA = \frac{4\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta\right)$ …②，$PC = \frac{4\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\right)$ …③

①,②,③より，
$$PA + PB + PC = \frac{4\sqrt{3}}{3}\left(\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta\right)$$
$$= \frac{8\sqrt{3}}{3}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{3}$より，$\underline{最大値は，\frac{8\sqrt{3}}{3}\ \left(\theta = \frac{\pi}{6}のとき\right)}$ //

(3) ①,②,③より，

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2\left\{\sin^2\theta + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\right)^2\right\}$$
$$= \frac{16}{3}\left(\frac{3}{2}\sin^2\theta + \frac{3}{2}\cos^2\theta\right)$$
$$= 8\ (一定)$$ ▨

(4) ①,②,③より，

$$PA \cdot PB \cdot PC = \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^3 \cdot \sin\theta\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\right)$$
$$= \frac{64\sqrt{3}}{9}\sin\theta\left(\frac{3}{4}\cos^2\theta - \frac{1}{4}\sin^2\theta\right)$$

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ より．

$$= \frac{64\sqrt{3}}{9}\left(\frac{3}{4}\sin\theta - \sin^3\theta\right)$$

2014年 第2問　　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{2}$ 一辺の長さが2の正三角形ABCと，その外接円Oがある．弧AB上の点Pは，$\angle \mathrm{BCP} = \theta$が$0 < \theta < \dfrac{\pi}{3}$を満たすように動く．次の問いに答えよ．

(1) 線分PBの長さをθを用いて表せ．

(2) $\mathrm{PA} + \mathrm{PB} + \mathrm{PC}$の最大値を求めよ．

(3) $\mathrm{PA}^2 + \mathrm{PB}^2 + \mathrm{PC}^2$は一定であることを示せ．

(4) $\mathrm{PA} \cdot \mathrm{PB} \cdot \mathrm{PC}$の最大値を求めよ．

(4)のつづき．

$t = \sin\theta$ $\left(0 < t < \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ とおき，$f(t) = \frac{3}{4}t - t^3$ とする．

$f'(t) = \frac{3}{4} - 3t^2$

$= -3\left(t + \frac{1}{2}\right)\left(t - \frac{1}{2}\right)$

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	

$\therefore$ 右の増減表より，

$f(t)$ の最大値は，$\frac{1}{4}$ $\left(t = \frac{1}{2}\text{ のとき}\right)$

$t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$ なので

PA・PB・PC の最大値は，$\frac{64\sqrt{3}}{9} \cdot \frac{1}{4} = \underline{\frac{16\sqrt{3}}{9}\ \left(\theta = \frac{\pi}{6}\text{ のとき}\right)}$ //