

2013年 医学部 第3問

3  $m, n$  を自然数として、関数  $f(x) = x^m(1-x)^n$  を考える。このとき以下の各問いに答えよ。

- (1)  $0 \leq x \leq 1$  における  $f(x)$  の最大値を  $m, n$  を用いて表せ。
- (2) 定積分  $\int_0^1 f(x) dx$  を  $m, n$  を用いて表せ。
- (3)  $a, b, c$  を実数として、関数  $g(x) = ax^2 + bx + c$  の  $0 \leq x \leq 1$  における最大値を  $M(a, b, c)$  とする。次の2条件 (i), (ii) が成立するとき、 $M(a, b, c)$  の最小値を  $m, n$  を用いて表せ。
- (i)  $g(0) = g(1) = 0$
- (ii)  $0 < x < 1$  のとき  $f(x) \leq g(x)$
- (4)  $m, n$  が2以上の自然数で  $m > n$  であるとき

$$\frac{(m+n+1)!}{m!n!} > \frac{(m+n)^{m+n}}{m^m n^n} > 2^{2n-1}$$

が成立することを示せ。