

2013年 商学部 第1問

1 次の の中を適当に補いなさい。(1) 実数 x, y が $2x + y = \sqrt{2013}$ を満たすとき, xy の最大値を求めると .

(2) $\sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \text{} \cdot \sqrt{n+1}$ $\frac{2013}{8}$

(3) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ のとき, 関数 $y = \sin^3 x + \cos^3 x$ の最大値 M と最小値 m を $t = \sin x + \cos x$ とおいて求めると $(M, m) = \text{}$. $(1, \frac{\sqrt{2}}{2})$

(1) $xy = x \cdot (\sqrt{2013} - 2x)$

$$= -2x^2 + \sqrt{2013}x$$

$$= -2\left(x - \frac{\sqrt{2013}}{4}\right)^2 + \frac{2013}{8}$$

 $\therefore xy$ の最大値は $\frac{2013}{8}$ ($x = \frac{\sqrt{2013}}{4}, y = \frac{\sqrt{2013}}{2}$ のとき)

(2) (与式) $= \sum_{k=0}^n \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k+1}}{(\sqrt{k} + \sqrt{k+1})(\sqrt{k} - \sqrt{k+1})}$

$$= \sum_{k=0}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$$

$$= \sqrt{n+1}$$

(3) $t = \sin x + \cos x$ より $t^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$ また $t = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$ より

$$1 \leq t \leq \sqrt{2}$$

$$\therefore y = (\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x)$$

$$= t \cdot \left(1 - \frac{t^2 - 1}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t$$

$$y' = -\frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{2}$$

$$= -\frac{3}{2}(t+1)(t-1)$$

t	1	...	$\sqrt{2}$
y'	0	-	
y	1	\searrow	$\frac{\sqrt{2}}{2}$



$$\therefore (M, m) = \left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$