



2012年理系第5問

5 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が次の条件 (D) を満たすとする.

(D) A の成分 a, b, c, d は整数である. また, 平面上の4点 $(0, 0), (a, b), (a+c, b+d), (c, d)$ は, 面積1の平行四辺形の4つの頂点をなす.

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおく. 次の問いに答えよ.

(1) 行列 BA と $B^{-1}A$ も条件 (D) を満たすことを示せ.

(2) $c = 0$ ならば, A に B, B^{-1} のどちらかを左から次々にかけることにより, 4個の行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ のどれかにできることを示せ.

(3) $|a| \geq |c| > 0$ とする. $BA, B^{-1}A$ に少なくともどちらか一方は, それを $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ とすると

$$|x| + |z| < |a| + |c|$$

を満たすことを示せ.