2014年 経済（経済、会計）・観光（観光）・コミュ（スポーツ） 第3問

$\boxed{3}$ 座標平面上に放物線 $y = x^2 + \frac{1}{16}$ と円 $x^2 + y^2 - 3y + 1 = 0$ がある．このとき，次の問に答えよ．

(1) 円の中心の座標と半径を求めよ．

(2) 円の中心と円周上の点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ を通る直線の傾きを求めよ．

(3) 円周上の点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ における円の接線の方程式を求めよ．

(4) (3) で求めた接線と放物線のすべての交点の座標を求めよ．

(5) (3) で求めた接線と放物線で囲まれた部分の面積を求めよ．

(1) $x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$ $\therefore$ 中心 $\left(0, \frac{3}{2}\right)$, 半径 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ //

(2) 傾きは $\dfrac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{\frac{1}{2} - 0} = -2$ //

(3) 接線は (2) の直線に垂直なので 傾きは $\frac{1}{2}$

$\therefore$ $y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$ $\therefore$ $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ //

(4) $x^2 + \frac{1}{16} - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) = 0$

$x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{16} = 0$ $\therefore$ $x = \dfrac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{3}{16}}}{2}$ $\therefore$ $x = -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$

$\therefore$ 交点は $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right), \left(\frac{3}{4}, \frac{5}{8}\right)$ //

(5) $S = \int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \left(x^2 + \frac{1}{16}\right) dx$

$= -\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \left(x + \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{3}{4}\right) dx$

$= \frac{1}{6} \cdot 1^3$

$= \frac{1}{6}$ //