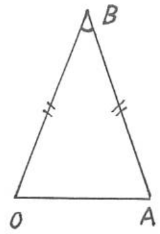
2016年 現代心理（映像）・社会・コミュ（福祉） 第2問

$\boxed{2}$ a, b, c, d, eを実数とし，$b>0$，$e>0$とする．座標空間内の3点A(6, 0, 0)，B(a, b, 0)，C(c, d, e)と原点O(0, 0, 0)で作られる三角錐OABCにおいて，



$$\mathrm{AB}=\mathrm{OB},\quad \cos\angle\mathrm{OBA}=\frac{4}{5},\quad \mathrm{AC}=\mathrm{BC}=\mathrm{OC}=9$$

であるとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 線分OBの長さを求めよ．さらに点Bの座標を求めよ．

(2) 三角形OABの外心をDとする．線分ODの長さを求めよ．さらに，点Dの座標を求めよ．

(3) 点Cの座標を求めよ．

(4) 三角錐OABCの体積Vを求めよ．

(1) $\cos\angle OBA = \dfrac{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{AB}|}$　ここで $|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{a^2+b^2}$ より，$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{a^2+b^2}$

また，$\overrightarrow{AB}=(a-6,b,0)$ より，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AB}=a(a-6)+b^2$

$\therefore \dfrac{4}{5}=\dfrac{a^2-6a+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}} \iff \dfrac{4}{5}=1-\dfrac{6a}{a^2+b^2}$

$\therefore a^2+b^2=30a$ …①

また $|\overrightarrow{AB}|^2=(a-6)^2+b^2$　$\therefore (a-6)^2+b^2=a^2+b^2$　$\therefore a=3$ …②

①，②より $b>0$を考えて，$b=9$　$\therefore \underline{OB=3\sqrt{10},\ B(3,9,0)}$ //

(2) 外接円の半径をRとすると，$OD=R$

また，$\cos\angle OBA=\dfrac{4}{5}$ より $\sin\angle OBA=\dfrac{3}{5}$

正弦定理より，$\dfrac{6}{\frac{3}{5}}=2R$　$\therefore R=5$　$\therefore \underline{OD=5}$ //

Dは線分OAの垂直二等分線上にあるので $(3,x,0)$と表せる $(x>0)$

$\therefore OD^2=9+x^2=25$　$\therefore x=4$　$\therefore \underline{D(3,4,0)}$ //

(3) $C(3,4,e)$ $(e>0)$と表せる $AC^2=9^2$より　$9+16+e^2=81$　$e>0$より $e=2\sqrt{14}$

$\therefore \underline{C(3,4,2\sqrt{14})}$ //

(4) $V=\triangle OAB\times CD\times\dfrac{1}{3}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 9\times 2\sqrt{14}\times\dfrac{1}{3}$

$=\underline{18\sqrt{14}}$ //