立教大学

2016年 理学部（個別日程） 第4問

$\boxed{4}$ c を $0<c<1$ を満たす実数とする．関数

$$F(x)=\int_0^x (t-c)\log\left(t^2-t+\frac{1}{2}\right)dt$$

について，次の問いに答えよ．

(1) $F(x)$ の導関数 $F'(x)$ を求めよ．

(2) $F'(x)<0$ となる x の値の範囲を c を用いて表せ．

(3) $F(x)$ が極大値をとる x の値と極小値をとる x の値をそれぞれ求めよ．

(4) $c=\dfrac{1}{2}$ のとき，$x\geqq 0$ の範囲における $F(x)$ の最小値を求めよ．

(1) $\underline{F'(x)=(x-c)\log\left(x^2-x+\frac{1}{2}\right)}$ //

(2) $F'(x)<0$ となるのは.

$\left(x-c>0 \text{ かつ } 0<x^2-x+\frac{1}{2}<1\right)$ または $\left(x-c<0 \text{ かつ } x^2-x+\frac{1}{2}>1\right)$ のとき

$\Longleftrightarrow$ $\left(x>c \text{ かつ } \frac{1-\sqrt{3}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$ または $x<\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

$\Longleftrightarrow$ $\underline{x<\frac{1-\sqrt{3}}{2},\ c<x<\frac{1+\sqrt{3}}{2}}$ //

(3)

x	$\cdots$	$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	c	$\cdots$	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$
$F'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$F(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

(2)より 増減表は上のようになる． ∴ <u>極大値をとるのは $x=c$ のとき．極小値をとるのは $x=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$ のとき</u> //

(4) $F(0)=0$ ， ここで $\alpha=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ とおくと．

$F(\alpha)=\int_0^\alpha \left(t-\frac{1}{2}\right)\log\left\{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right\}dt$

$t-\frac{1}{2}=s$ とおくと． $dt=ds$， $\begin{array}{c|c} t & 0\to\alpha \\ \hline s & -\frac{1}{2}\to\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}$

$F(\alpha)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} s\log\left(s^2+\frac{1}{4}\right)ds$

$s^2+\frac{1}{4}=u$ とおくと． $2s\,ds=du$， $\begin{array}{c|c} s & -\frac{1}{2}\to\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \hline u & \frac{1}{2}\to 1\end{array}$

$F(\alpha)=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\log u\,du$

$=\frac{1}{2}\left[u\log u\right]_{\frac{1}{2}}^{1}-\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1}du$

$=-\frac{1}{4}\log\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$

$=\underline{\frac{1}{4}\log 2-\frac{1}{4}}$ //

$=\frac{1}{4}(\log 2-1)<0$ より $F(0)$ より小さい