



2014年 理学部（数学・情報数理）第1問

1 袋の中に、赤玉が3個、白玉が7個が入っている。袋から玉を無作為に1つ取り出し、色を確認してから、再び袋に戻すという試行を行う。この試行を  $N$  回繰り返したときに、赤玉を  $A$  回（ただし  $0 \leq A \leq N$ ）取り出す確率を  $p(N, A)$  とする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 確率  $p(N, A)$  を  $N$  と  $A$  を用いて表せ。

(2)  $N$  が10の倍数、すなわち  $N = 10n$  となる自然数  $n$  があるとする。確率  $p(10n, 0)$ ,  $p(10n, 1)$ ,  $\dots$ ,  $p(10n, 10n)$  のうち、一番大きな値は  $p(10n, 3n)$  であることを次の手順により証明せよ。

(i) 0以上の整数  $a$ , 自然数  $b$  に対して,  $\frac{b!}{a!} \leq b^{b-a}$  を示す。ただし  $0! = 1$  とする。

(ii) 0以上  $10n$  以下の整数  $m$  に対して,  $\frac{p(10n, m)}{p(10n, 3n)} \leq 1$  を示す。