

2014年医学部第3問

3 空間に、同一直線上にない3点O, A, Bがあり, 条件

$$|\vec{OA}| = 2, \quad |\vec{OB}| = 1 \quad \vec{OA} \cdot \vec{OB} = -1$$

を満たしている. O, A, Bを通る平面を $\alpha$ とし,  $\alpha$ 上にない点Pを次の条件を満たすようにとる.

$$\vec{OP} \cdot \vec{OA} = 2, \quad \vec{OP} \cdot \vec{OB} = -1$$

点Pから平面 $\alpha$ に下ろした垂線と $\alpha$ との交点をHとすると

$$\vec{OH} = \frac{\text{ア}}{\text{イ}} \vec{OA} - \frac{\text{ウ}}{\text{エ}} \vec{OB}$$

となる.  $|\vec{OP}| = p$ とおくと,  $\triangle OPH$ の面積は

$$\frac{\text{オ}}{\text{カ}} \sqrt{\text{キ} p^2 - \text{ク}}$$

と表される.

$\triangle OAB$ の面積が $\triangle OPH$ の面積の2倍に等しいとき

$$p^2 = \frac{\text{ケコ}}{\text{サシ}}$$

である. またこのとき,  $\vec{PQ} = \frac{5}{3} \vec{PO}$ を満たす点Qをとると, 四面体QOAHの体積は

$$\frac{\sqrt{\text{ス}}}{\text{セソ}}$$

である.