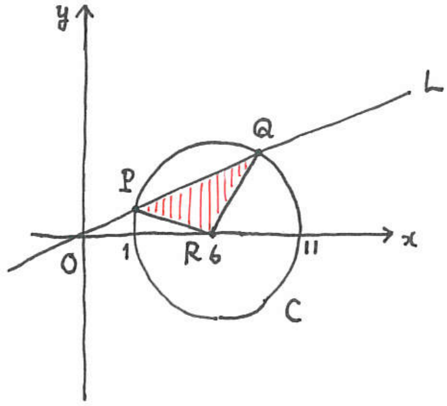
2010年 医学部 第14問

$\boxed{14}$ 円$C:(x-6)^2+y^2=25$と直線$L:y=ax$（aは実数，$a>0$）について考える．CとLの2つの相異なる交点をP，Qとする．Cの中心とP，Qでつくる三角形の面積が最大となるaをAとする．$\sqrt{47}A$の値を求めよ．

円Cの中心をRとおくと．

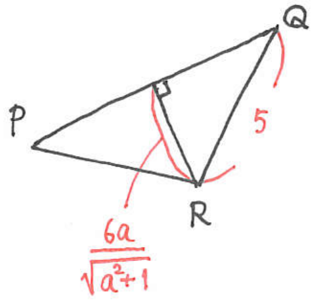
R(6,0)



∴ LとRのキョリは点と直線のキョリ公式より．

$$\frac{|6a|}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{6a}{\sqrt{a^2+1}}$$ となる．

∴ 三平方の定理より．



$$\left(\frac{1}{2}PQ\right)^2=5^2-\left(\frac{6a}{\sqrt{a^2+1}}\right)^2$$

$$\therefore\ \frac{1}{4}PQ^2=25-\frac{36a^2}{a^2+1}$$

$$\therefore\ PQ=\frac{2\sqrt{25-}}{\sqrt{a^2+1}}\quad\cdots①$$

△PQRの面積をSとおくと．$S=\frac{1}{2}\cdot5\cdot5\cdot\sin\angle PRQ$より．

Sが最大になるのは．$\angle PRQ=90^\circ$のとき．

このとき．$PQ=5\sqrt{2}\quad\cdots②$

①，②より．$\dfrac{2\sqrt{25-11a^2}}{\sqrt{a^2+1}}=5\sqrt{2}$

両辺2乗して．整理すると．$a^2=\dfrac{25}{47}$　∴ $a>0$より $a=\dfrac{5}{\sqrt{47}}$

$$\therefore\ \sqrt{47}\,a=\underline{5}\,//$$