神戸大学

2016年 理系 第3問

$\boxed{3}$ aを正の定数とし，2曲線 $C_1 : y = \log x$，$C_2 : y = ax^2$ が点Pで接しているとする．以下の問に答えよ．

(1) Pの座標と a の値を求めよ．

(2) 2曲線 C_1，C_2 と x 軸で囲まれた部分を x 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積を求めよ．

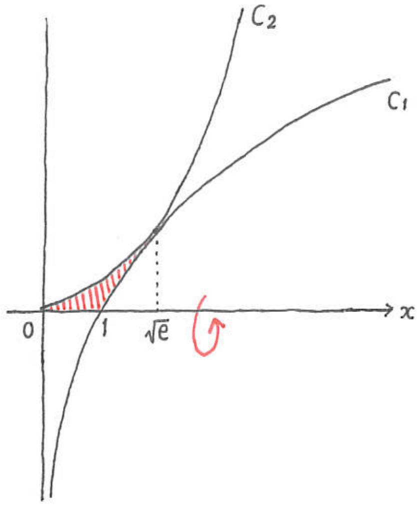
(1) $f(x) = \log x$，$g(x) = ax^2$，点Pの x 座標を t とおくと（$t>0$ とする）

$f'(x) = \dfrac{1}{x}$，$g'(x) = 2ax$ となり，2曲線が点Pで接することより，

$$f(t) = g(t) \text{ かつ } f'(t) = g'(t) \iff \begin{cases} \log t = at^2 \cdots ① \\ \dfrac{1}{t} = 2at \cdots ② \end{cases}$$

②より，$a = \dfrac{1}{2t^2}$ これを①に代入して，$\log t = \dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore t = \sqrt{e}$

$\therefore \underline{P\left(\sqrt{e}, \dfrac{1}{2}\right),\ a = \dfrac{1}{2e}}$ //



(2) 求める体積をVとおくと，

$$V = \pi\int_0^{\sqrt{e}} \left(\frac{1}{2e}x^2\right)^2 dx - \pi\int_1^{\sqrt{e}} (\log x)^2\, dx$$

$$= \pi\int_0^{\sqrt{e}} \frac{1}{4e^2}x^4\, dx - \pi\int_1^{\sqrt{e}} (x)'(\log x)^2\, dx$$

$$= \pi\left[\frac{1}{4e^2}\cdot\frac{x^5}{5}\right]_0^{\sqrt{e}} - \pi\left[x(\log x)^2\right]_1^{\sqrt{e}} + \pi\int_1^{\sqrt{e}} 2\log x\, dx$$

$$= \pi\left(\frac{1}{4e^2}\cdot\frac{e^2\sqrt{e}}{5}\right) - \pi\left(\sqrt{e}\cdot\frac{1}{4}\right) + \pi\cdot 2\int_1^{\sqrt{e}} (x)'\log x\, dx$$

$$= \frac{1}{20}\pi\sqrt{e} - \frac{1}{4}\pi\sqrt{e} + 2\pi\left[x\log x\right]_1^{\sqrt{e}} - 2\pi\int_1^{\sqrt{e}} dx$$

$$= \frac{1}{20}\pi\sqrt{e} - \frac{1}{4}\pi\sqrt{e} + \pi\sqrt{e} - 2\pi(\sqrt{e}-1)$$

$$= \underline{2\pi\left(1 - \frac{3}{5}\sqrt{e}\right)}$$ //

V =